

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი  
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

დოქტორანტურის საგანმანათლებლო პროგრამა: მათემატიკა

კობა ივანაძე

განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასების შესახებ

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად  
წარმოდგენილი დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: თეიმურაზ ახოზაძე  
ფიზიკა-მათემატიკის  
მეცნიერებათა დოქტორი

თბილისი  
2025 წელი

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University  
Faculty of Exact and Natural Sciences

Doctoral Program: Mathematics

**Koba Ivanadze**

**On The Classes of Functions of Generalized Bounded Variation**

The thesis work is performed to obtain a PhD academic degree in  
Mathematics

Scientific Supervisor: **Teimuraz Akhobadze**  
Doctor of Phy. Math

Tbilisi  
2025 Year

## აბსტრაქტი

სასრული ვარიაციის ცნება შემოღებულია ჟორდანის მიერ 1881 წელს. ვინერმა შემოიღო  $BV_p$  კლასის ცნება 1924 წელს. ლავმა შეისწავლა ამ კლასის ფუნქციონალური თვისებები. იუნგმა შემოიღო  $\phi$ -ვარიაციის ცნება 1937 წელს. მუსელაკმა და ორლიჩმა შეისწავლეს ამ კლასის თვისებები. უოტერმანმა შეისწავლა  $\Lambda$ -ვარიაციის ფუნქციონალური კლასი. ჭანტურიამ განსაზღვრა ვარიაციის მოდულის ცნება.

კიტამ და იონედამ შემოიღეს სასრული ვარიაციის ახალი განსაზღვრება 1990 წელს. თ. ახოზაძემ განაზოგადა არნიშნული კლასი და შემოიღო  $(p_n, \varphi)$ -ვარიაციის ცნება, ხოლო ფუნქციონალური კლასი აღნიშნა  $BV(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  სიმბოლოთი.

ნაშრომში შესწავლილია  $BV(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  კლასის ფუნქციონალური თვისებები, დადგენილია ამ კლასის „ანომალიური“ თვისება და შემოღებულია  $(p_n, \varphi)$ -ვარიაციის აზრით კრებადობისა და  $(p_n, \varphi)$ -აბსოლუტურად უწყვეტობის ცნებები.  $(p_n, \varphi)$ -ვარიაციის აზრით აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციონალური კლასი აღნიშნულია  $AC(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  სიმბოლოთი.

შემოღებულია აღნიშნული კლასის ექვივალენტური განსაზღვრება. დადგენილია  $(p_n, \varphi)$ -აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციონალური კლასი და  $BV(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  ო  $C[a, b]$  კლასს შორის კავშირი. კერძოდ, დადგენილია პირობები  $p_n$  და  $\varphi_n$  მიმდევრობებისთვის, როცა  $AC(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  კლასი არის  $BV(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  ო  $C[a, b]$  კლასის არასაკუთრივი ქვესიმრავლე.

გამოკვლეულია  $AC(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  კლასის ფუნქციებისთვის სტეკლოვის ფუნქციებისა და სინგულარული ინტეგრალების  $(p_n, \varphi)$ -ვარიაციის აზრით კრებადობის საკითხები. შესწავლილია  $(p_n, \varphi)$ -აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციონალური ფურიეს კოეფიციენტების რიგი და დადგენილია ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის თანაბარი კრებადობის პირობები.

1973 წელს ტაბერსკიმ განიხილა განზოგადოებული დირიხლეს გულები. განზოგადოებული დირიხლეს გულებისთვის დამტკიცებულია სალემის ტესტის ანალოგიური პირობა და მიღებულია სხვადასხვა შედეგი. კერძოდ, დინის, დინი-ლიფშიცის და კიტას ტესტი განზოგადოებული დირიხლეს გულებისთვის

## Abstract

The concept of bounded variation was introduced by Jordan in 1881. Wiener introduced the concept of  $BV_p$  class in 1924. Love studied the functional properties of this class. Young introduced the concept of  $\phi$ -variation in 1937. Musielak and Orlich studied the properties of this class. Waterman studied the class of  $\Lambda$ -variation functions. Chanturia defined the concept of the modulus of variation.

Kita and Yoneda introduced a new definition of bounded variation in 1990. T. Akhobadze generalized the aforementioned class and introduced the concept of  $(p_n, \varphi)$ -variation, and the class of functions was denoted by the symbol  $BV(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$ .

The functional properties of the class  $BV(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  has been studied in the work. The “anomalous” property of this class was established and have been introduced the concepts of convergence and  $(p_n, \varphi)$ -absolute continuity in the sense of  $(p_n, \varphi)$ -variation. The class of absolutely continuous functions in the sense of  $(p_n, \varphi)$ -variation was denoted by the symbol  $AC(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$ .

An equivalent definition of the class has been introduced. A connection is established between the class of  $(p_n, \varphi)$ -absolutely continuous functions and the class  $BV(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b]) \cap C[a, b]$ . In particular, conditions are established for sequences  $p_n$  and  $\varphi_n$  when the class  $AC(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  is a non-proper subset of the class  $BV(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b]) \cap C[a, b]$ .

The conditions of convergence of functions of the class  $AC(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  are investigated by Steklov functions and singular integrals in the sense of  $(p_n, \varphi)$ -variation. The order of Fourier coefficients of  $(p_n, \varphi)$ -absolutely continuous functions has been studied and the conditions of uniform convergence of the Fourier trigonometric series were established.

In 1973, Tabersky considered generalized Dirichlet integrals. Conditions analogous to the Salem test have been proved for generalized Dirichlet kernels and various results have been obtained. In particular, the Dean, Dean-Lifshitz, and Kita tests for generalized Dirichlet integrals are established.

# შინაარსი

|                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| აბსტრაქტი.....                                                                              | 3  |
| Abstract.....                                                                               | 4  |
| თავი I: განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასების შესახებ .....                    | 6  |
| 1.1 შესავალი .....                                                                          | 6  |
| 1.2 განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციების ზოგიერთი თვისება .....                       | 6  |
| 1.3 განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციების "ანომალური" თვისების შესახებ .....           | 10 |
| 1.4 განზოგადებული აბსოლუტურად უწყვეტობის ცნება .....                                        | 14 |
| 1.5. აპროქსიმაცია სტეკლოვის ფუნქციებით.....                                                 | 24 |
| 1.6 აპროქსიმაცია სინგულარული ინტეგრალებით .....                                             | 30 |
| თავი II. განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციათა ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივები.....    | 33 |
| 2.1 შესავალი .....                                                                          | 33 |
| 2.2 ფურიეს კოეფიციენტები .....                                                              | 34 |
| 2.3 ფურიეს მწკრივების კრებადობის შესახებ.....                                               | 36 |
| თავი III. თანაბარი კრებადობის სალემის ნიშანი დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალებისათვის ..... | 42 |
| 3.1 შესავალი .....                                                                          | 42 |
| 3.2 დამხმარე ლემები .....                                                                   | 43 |
| 3.3 ძირითადი შედეგები.....                                                                  | 52 |
| დასკვნა .....                                                                               | 76 |
| ლიტერატურა.....                                                                             | 77 |
| გამოქვეყნებული ნაშრომები .....                                                              | 79 |

## თავი I: განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასების შესახებ

### 1.1 შესავალი

შემოსაზღვრული ვარიაციის ცნება შემოღებულია ჟორდანის [7] მიერ. ვინერმა [17] განიხილა ფუნქციათა  $BV_p$  კლასი. ლავმა [10] შეისწავლა ამ კლასის ფუნქციონალური თვისებები. იუნგმა [20] შემოიღო  $\Phi$ -ვარიაციის ცნება. მუსელაკმა და ორლიჩმა [11] შეისწავლეს ამ კლასის თვისებები. უოტერმანმა [15] შეისწავლა შემოსაზღვრული  $\Lambda$ -ვარიაციის ფუნქციათა კლასი. ჭანტურიამ [5] განსაზღვრა ფუნქციის ვარიაციის მოდულის ცნება. კიტამ და იონედამ [9] შემოიღეს სასრული ვარიაციის ახალი განსაზღვრება. ახოზაძემ [1,2] განაზოგადა აღნიშნული კლასი და შეისწავლა ამ კლასის თვისებები. ეს ჩამონათვალი კიდევ შეგვიძლია გავაგრძელოთ [18].

**განსაზღვრება 1.1.** ვთქვათ,  $f(t)$  არის სასრულ, ჩაკეტილ  $[a, b]$  ინტერვალზე განსაზღვრული ფუნქცია. დავუშვათ,  $p_n$  და  $\phi(n)$  ისეთი მიმდევრობებია, რომ  $p_1 \geq 1$ ,  $p_n \uparrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  და  $\phi(1) \geq 1$ ,  $\phi(n) \uparrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ . ვიტყვი, რომ  $f \in BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  თუ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) = \sup_n \sup_{\Delta} \left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} : \rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(n)} \right)^{1/p_n} < +\infty,$$

სადაც  $\Delta$  არის  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  დანაწილება  $[a, b]$  ინტერვალის და  $\rho(\Delta) = \min_i (t_i - t_{i-1})$ .

$\phi(n) = 2^n$  ფუნქციისთვის,  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  კლასი განხილულია კიტასა და იონედას [9] მიერ. თუ არ არის არვის საშიშროება  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ -ის ნაცვლად გამოვიყენებთ აღნიშვნას:  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi)$ .

შემდგომში  $p_n$  მიმდევრობა შეიძლება აღნიშნული იყოს  $p(n)$  სიმბოლოთი.

### 1.2 განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციების ზოგიერთი თვისება

ადვილი შესამოწმებელია, რომ  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  არის ნორმირებული სივრცე, სადაც

$$\|f\| = |f(a)| + V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]).$$

**თეორემა 1.2.** ა)  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi)$  არის წრფივი სივრცე და ყოველი  $\alpha$  და  $\beta$  -თვის გვაქვს:

$$V(\alpha f + \beta g, p_n \uparrow \infty, \phi) \leq |\alpha|V(f, p_n \uparrow \infty, \phi) + |\beta|V(g, p_n \uparrow \infty, \phi)$$

ბ)  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  არის სრული სივრცე.

გ)  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  არ არის სეპარაბელური.

დ) თუ  $[a, b]$  ინტერვალის ყოველ  $t$  წერტილში  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = f(t)$ , მაშინ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} V(f_k, p_n \uparrow \infty, \phi).$$

**დამტკიცება:** ა) ცხადია.

ბ) ვთქვათ,  $(f_s)$  არის ფუნდამენტური მიმდევრობა  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ -ში. მაშინ ყოველი  $\varepsilon > 0$  -თვის, არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N(\varepsilon)$ , რომ ყოველი ნატურალური  $i, r > N(\varepsilon)$  რიცხვებისთვის გვაქვს:

$$(1.1) \quad \|f_i - f_r\| = |f_i(a) - f_r(a)| + V(f_i - f_r, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) < \varepsilon.$$

ვარიაციის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ  $[a, b]$  ინტერვალის ყოველი  $t$  წერტილისთვის

$$|(f_i - f_r)(t)| - |(f_i - f_r)(a)| \leq$$

$$|(f_i - f_r)(t) - (f_i - f_r)(a)| \leq V(f_i - f_r, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$$

აქედან და (1.1)-დან მივიღებთ

$$|(f_i - f_r)(t)| \leq |f_i(a) - f_r(a)| + V(f_i - f_r, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) < \varepsilon$$

უკანასკნელი გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ  $(f_s)$  მიმდევრობა თანაბრად კრებადია. ვთქვათ,  $f_r \rightarrow f$  თანაბრად და განვიხილოთ  $[a, b]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება, რომლისთვისაც  $\rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(n)}$ . ყოველი  $i, r > N(\varepsilon)$ -თვის გვაქვს:

$$\left( \sum_{k=1}^m |(f_i - f_r)(t_k) - (f_i - f_r)(t_{k-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} < \varepsilon.$$

$r \rightarrow +\infty$  ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ:

$$\left( \sum_{k=1}^m |(f_i - f)(t_k) - (f_i - f)(t_{k-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \leq \varepsilon.$$

ამიტომ,

$$V(f_i - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0, i \rightarrow \infty.$$

ამასთან, რაიმე ფიქსირებული  $i$ -თვის ( $i > N(\varepsilon)$ ) გვექნება:

$$\|f\| \leq \|f - f_i\| + \|f_i\| \leq \varepsilon + \|f_i\|.$$

გ) ვთქვათ,  $a < x_0 < b$  და

$$(1.2) \quad f_{x_0}(t) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } a \leq t \leq x_0 \\ 1, & \text{თუ } x_0 < t \leq b \end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ  $f \in BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ . თუ  $f_{x_0}$  და  $f_{x_1}$  არის  $(a, b)$ -ს ორი განსხვავებული  $x_0 < x_1$  წერტილის შესაბამისი ფუნქციები, მაშინ

$$\|f_{x_0} - f_{x_1}\| = V(f_{x_0} - f_{x_1}, p_n \uparrow \infty, \phi) \geq |(f_{x_0} - f_{x_1})(x_1) - (f_{x_0} - f_{x_1})(0)| = 1$$

$f_{x_0}$  ფუნქციების სიმრავლე არის არათვლადი და მანძილი ყოველ ორ განსხვავებულ ფუნქციას შორის არ არის ნაკლები 1-ზე. ეს ნიშნავს, რომ  $BV(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  არ არის სეპარაბელური.

დ) ვთქვათ,

$$A := \liminf_{k \rightarrow \infty} V(f_k, p_n \uparrow \infty, \phi),$$

მაშინ არსებობს ისეთი  $f_{k_r}$  ქვემიმდევრობა, რომ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(f_{k_r}, p_n \uparrow \infty, \phi) = A.$$



ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს ისეთი  $N(\varepsilon)$  რიცხვი, რომ

$$V(f_{k_r}, p_n \uparrow \infty, \phi) < A + \varepsilon, r > N(\varepsilon).$$

ვთქვათ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება და  $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{1}{\phi(n)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , მაშინ

$$\left( \sum_{i=1}^m |f_{k_r}(t_i) - f_{k_r}(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{1/p_n} \leq V(f_{k_r}, p_n \uparrow \infty, \phi) < A + \varepsilon.$$

ამიტომ მივიღებთ, რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi) \leq A.$$

□

**განსაზღვრება 1.3.** ვიტყვით, რომ ფუნქციათა  $f_n$  მიმდევრობა ვარიაციის აზრით კრებადია  $f$ -კენ, თუ  $V(f_n - f, p_n \uparrow \infty, \phi) \rightarrow 0$ , როცა  $n \rightarrow \infty$ .

საზოგადოდ, ფუნქციათა მიმდევრობის ვარიაციის აზრით კრებადობიდან გამომდინარეობს თანაბრად კრებადობა. თუ  $\phi(n)^{\frac{1}{p_n}}$  შემოსაზღვრულია, მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ ისინი ეკვივალენტურია. თუ  $\phi(n)^{\frac{1}{p_n}}$  არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ არსებობს თანაბრად კრებადი მიმდევრობა, რომელიც არ არის ვარიაციის აზრით კრებადი. მართლაც, არსებობს  $\phi(n_k)^{\frac{1}{p_{n_k}}} \rightarrow \infty$  ქვემიმდევრობა და ვთქვათ,

$$f_k(t) = \frac{1}{\phi(n_k)^{1/p_{n_k}}} \sin(2\pi[\phi(n_k)/4]t), t \in [0, 1]$$

აქ და შემდგომშიც  $[a]$  სიმბოლოთი აღვნიშნავთ  $a$ -ს მთელ ნაწილს. ცხადია,  $f_k \rightarrow 0$  თანაბრად  $[0, 1]$  -ზე. განვიხილოთ წერტილები:  $t_i^k = \frac{i}{4[\frac{\phi(n_k)}{4}]}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 4[\frac{\phi(n_k)}{4}]$ .

ადვილი შესაჩვენებია, რომ  $t_i^k - t_{i-1}^k = \frac{1}{4[\phi(n_k)/4]} \geq \frac{1}{\phi(n_k)}$ . აქედან მივიღებთ

$$\left( \sum_{i=1}^{4 \left[ \frac{\phi(n_k)}{4} \right]} |f_k(t_i^k) - f_k(t_{i-1}^k)|^{p_{n_k}} \right)^{\frac{1}{p_{n_k}}} = (4[\phi(n_k)/4])^{1/p_{n_k}} \cdot \frac{1}{\phi(n_k)^{\frac{1}{p_{n_k}}}} \geq \frac{1}{2},$$

როცა  $\phi(n_k) \geq 8$ . ეს ნიშნავს, რომ საკმარისად დიდი  $k$ -თვის  $V(f_k, p_n \uparrow \infty, \phi, [0,1]) \geq \frac{1}{2}$ .

**ლემა 1.4.** ვთქვათ,  $f$  არის  $[a, b]$  ინტერვალზე განსაზღვრული ფუნქცია და  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$  არის წერტილთა ისეთი სიმრავლე  $[a, b]$  -დან, რომ  $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{1}{\phi(k)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . მაშინ

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \leq 3V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]).$$

**დამტკიცება:** ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \leq \\ & \left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} + |f(t_1) - f(a)|^{p_k} + |f(b) - f(t_{m-1})|^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \leq \\ & \left( \sum_{i=2}^{m-1} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} + |f(t_1) - f(a)|^{p_k} + |f(b) - f(t_{m-1})|^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} + \\ & |f(t_1) - f(t_0)| + |f(t_m) - f(t_{m-1})| \leq 3V(f, p_n \uparrow \infty, \phi). \end{aligned}$$

□

### 1.3 განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციების "ანომალიური" თვისების შესახებ

**თეორემა 1.5.** ვთქვათ,  $p_1 \geq 1$ ,  $p_n \uparrow \infty$  და  $\phi(1) \geq 1$ ,  $\phi(n) \uparrow \infty$ . მაშინ ყოველი  $x \in (a, b)$  -თვის არსებობს  $y \in (x, b)$  და  $[a, b]$  ინტერვალზე განსაზღვრული ისეთი  $f$  ფუნქცია, რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, y]) < V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, x]).$$

დამტკიცება: 1) ვთქვათ,  $r$  არის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც:  $x - a \geq \frac{2}{\phi(r)}$ ;

$$2) c := x - \frac{1}{\phi(r)};$$

3) ავირჩიოთ ისეთი  $y \in (x, b)$  წერტილი, რომ

$$x < y < x + \frac{1}{\phi(r)},$$

და

$$x < y < c + \frac{1}{\phi(r-1)};$$

4) ვთქვათ,  $\xi \in (0, 1)$  ისეთი რიცხვია, რომ

$$0 < \xi < (2^{p_{r+1}/p_r} - 2)^{\frac{1}{p_{r+1}}};$$

საიდანაც,

$$(2 + \xi^{p_{r+1}})^{\frac{1}{p_{r+1}}} < 2^{\frac{1}{p_r}}.$$

განვსაზღვროთ  $f$  ფუნქცია  $[a, b]$  ინტერვალზე შემდეგი ფორმულით:

$$(1.3) \quad f(t) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } t = c, \\ \xi, & \text{თუ } t = y, \\ 0, & \text{თუ } t \in [a, b], t \neq c, t \neq y. \end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, x]) = 2^{p_r}.$$

მართლაც, ვთქვათ  $\Delta = \{a, c, x\}$ . 1) და 2)-დან გამომდინარეობს, რომ  $\rho(\Delta) = \frac{1}{\phi(r)}$ . აქედან

$$(1.4) \quad 2^{\frac{1}{p_r}} = (|f(c) - f(a)|^{p_r} + |f(x) - f(c)|^{p_r})^{\frac{1}{p_r}} \leq V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, x]).$$

ვთქვათ,  $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = x\}$  არის  $[a, x]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება, მაშინ გვაქვს ორი შემთხვევა:

ა) თუ  $c$  არ არის  $\Delta$  დანაწილების წერტილი, მაშინ

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} = 0;$$

ბ) თუ  $c$  არის  $\Delta$  დანაწილების წერტილი, მაშინ  $\rho(\Delta) = \min_i \{t_i - t_{i-1}\} \leq x - c = \frac{1}{\phi(r)}$ .

თუ  $\rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(k)}$ , ყოველი დანაწილებისთვის, რომელიც შეიცავს  $c$ -ს, გვექნება  $\frac{1}{\phi(r)} \geq \frac{1}{\phi(k)}$ . აქედან დავასკვნით, რომ  $k \geq r$ . იქედან, რომ  $p_n$  არის მკაცრად ზრდადი,

მივიღებთ:

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq 2^{\frac{1}{p_r}}.$$

აქედან და (1.4) -დან მივიღებთ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, x]) = 2^{\frac{1}{p_r}}.$$

წინადადების დამტკიცებისთვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, y]) < 2^{\frac{1}{p_r}} = V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, x]).$$

ვთქვათ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = y$  არის  $[a, y]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება.

მაშინ გვაქვს სამი შემთხვევა:

შემთხვევა 1.  $c$  არ ეკუთვნის  $\Delta$ -ს. მაშინ

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} = |f(y) - f(t_{m-1})| = \xi.$$

შემთხვევა 2.  $c$  ეკუთვნის  $\Delta$ -ს, მაგრამ არცერთი წერტილი  $(c, y)$ -დან არ ეკუთვნის  $\Delta$ -ს, ანუ  $t_m = y$  და  $t_{m-1} = c$ . მაშინ 3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\rho(\Delta) \leq y - c < \frac{1}{\phi(r-1)}.$$

ამიტომ, თუ  $\rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(k)}$ , მაშინ  $k > r - 1$  და  $k \geq r$ .

რადგან ყოველი ფიქსირებული  $a$  ( $0 < a < 1$ ) -თვის  $(1 + a^x)^{\frac{1}{x}}$  ფუნქცია არის კლებადი  $x$  ( $x \geq 1$ )-ის მიმართ. ამიტომ (1.3)-ის გათვალისწინებით გვაქვს

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} = (1 + (1 - \xi)^{p_k})^{\frac{1}{p_k}} \leq (1 + (1 - \xi)^{p_r})^{\frac{1}{p_r}} < 2^{\frac{1}{p_r}}.$$

შემთხვევა 3.  $c$  ეკუთვნის  $\Delta$ -ს და არსებობს წერტილი  $(c, y)$ -დან, რომელიც ეკუთვნის  $\Delta$ -ს. 2) და 3)-დან მივიღებთ

$$y - c = y - x + x - c < \frac{1}{\phi(r)} + \frac{1}{\phi(r)} = \frac{2}{\phi(r)}.$$

ამ შემთხვევაში გვექნება  $\rho(\Delta) < \frac{1}{\phi(r)}$ . ამასთან, თუ  $\rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(k)}$ , მაშინ  $k \geq r + 1$ .

აქედან

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} = (2 + \xi^{p_k})^{\frac{1}{p_k}} \leq (2 + \xi^{p_{r+1}})^{\frac{1}{p_{r+1}}}.$$

მაშასადამე, სამივე შემთხვევაში, როცა  $\rho(\Delta) \geq \frac{1}{\phi(k)}$  გვაქვს

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \leq \max \left\{ \xi, (1 + (1 - \xi)^{p_r})^{\frac{1}{p_r}}, (2 + \xi^{p_{r+1}})^{\frac{1}{p_{r+1}}} \right\}.$$

განსაზღვრება 1. 1 და 4)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, y]) &\leq \\ \max \left\{ \xi, (1 + (1 - \xi)^{p_r})^{\frac{1}{p_r}}, (2 + \xi^{p_{r+1}})^{\frac{1}{p_{r+1}}} \right\} &< 2^{\frac{1}{p_r}} = \\ V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, x]). \end{aligned}$$

□

**შენიშვნა 1.6.** ვთქვათ,  $f$  განსაზღვრულია  $[a, b]$  ინტერვალზე და  $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ .

**ლემა 1.4** -დან გამომდინარეობს, რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a_1, b_1]) \leq 3 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]).$$

**შენიშვნა 1.7.** ვთქვათ,  $c \in (a, b)$  და  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება, რომლისთვისაც  $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{1}{\phi(k)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  და  $t_{r-1} < c \leq t_r$ . რადგან  $\frac{1}{p_k} \leq 1$ , ამიტომ გვაქვს

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \leq \left( \sum_{i=1}^{r-1} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} +$$

$$+ |f(c) - f(t_{r-1})| + |f(t_r) - f(c)| + \left( \sum_{i=r+1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}}.$$

ბოლო უტოლობიდან და **ლემა 1.4** -დან გამომდინარეობს

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \leq$$

$$4 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, c]) + 4 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, b]).$$

## 1.4 განზოგადებული აბსოლუტურად უწყვეტობის ცნება

**განსაზღვრება 1.8.** ვთქვათ,  $f$  არის სასრულო, ჩაკეტილ  $[a, b]$  ინტერვალზე განსაზღვრული ფუნქცია. დავუშვათ,  $p_n$  და  $\phi(n)$  ისეთი მიმდევრობებია, რომ  $p_1 \geq 1$ ,  $p_n \uparrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  და  $\phi(1) \geq 1$ ,  $\phi(n) \uparrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ . ვიტყვით, რომ  $f$  ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $(p_n, \phi)$ -ის მიმართ, თუ სრულდება შემდეგი პირობა: ყოველი  $\varepsilon > 0$ -თვის, არსებობს ისეთი  $\delta > 0$  რიცხვი, რომ

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} < \varepsilon,$$

ყოველი არაგადამფარავი  $(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , ინტერვალების სასრული სიმრავლისა და ყოველი ნატურალური  $n$ -ისთვის, რომელთათვისაც  $\beta_i - \alpha_i \geq \frac{1}{\phi(n)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  და

$$\left( \sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i)^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} < \delta.$$

ამ კლასს ჩვენ აღვნიშნავთ  $AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ -თი და ზოგჯერ სიმარტივისთვის გამოვიყენებთ აღნიშვნას  $AC(p_n \uparrow \infty, \phi)$ . ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ, მაშინ  $f$  არის უწყვეტი.

**ლემა 1.9.** ვთქვათ,  $f$  განსაზღვრულია  $[a, b]$  ინტერვალზე და  $(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , არის არაგადამფარავი ინტერვალების ისეთი სასრული სიმრავლე, რომ  $\min_i (\beta_i - \alpha_i) \geq \frac{1}{\phi(k)}$ . მაშინ

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \leq 6V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]).$$

**დამტკიცება:** ლემა 1.9-ის ჭეშმარიტება გამომდინარეობს ლემა 1.4-დან.

□

**თეორემა 1.10.**  $f$  ეკუთვნის  $AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  კლასს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$  -თვის არსებობს ისეთი  $\delta > 0$ , რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < \varepsilon,$$

ყოველი  $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ -თვის, სადაც  $t_2 - t_1 < \delta$ .

**დამტკიცება:** აუცილებლობა ცხადია.

ახლა უნდა ვაჩვენოთ საკმარისობა. დავუშვათ  $\varepsilon > 0$  მოცემულია, მაშინ არსებობს ისეთი  $\eta > 0$ , რომ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < \frac{\varepsilon}{16},$$

ყოველი  $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ -თვის, როცა  $t_2 - t_1 < \eta$ .

ვთქვათ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის ისეთი ფიქსირებული დანაწილება, რომლისთვისაც  $x_i - x_{i-1} = \eta_1$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , სადაც  $\eta_1 < \eta$ . მაშინ

$$(1.5) \quad V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{16}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

დავუშვათ,  $r$  არის ისეთი დადებითი მთელის რიცხვი, რომლისთვისაც  $m^{\frac{1}{pr}} < 2$  და  $\delta = \min \left\{ \eta_1, \frac{1}{\phi(r)} \right\}$ . ვთქვათ,  $(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , არის არაგადამფარავი ინტერვალების ისეთი სასრული სიმრავლე, რომლისთვისაც

$$\left( \sum_{i=1}^s (\beta_i - \alpha_i)^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} < \delta,$$

და

$$\beta_i - \alpha_i \geq \frac{1}{\phi(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\left( \sum_{i=1}^s |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} < \varepsilon.$$

ვთქვათ,

$$A_k := \{i: (\alpha_i, \beta_i) \subset [x_{k-1}, x_k]\}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

(1.5) და ლემა 1.9 -დან

$$\sum_{i \in A_k} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} \leq (6V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{k-1}, x_k]))^{p_n} < \left( \frac{6\varepsilon}{16} \right)^{p_n}$$

ვიგულისხმობთ, რომ

$$B_k := \{i: \alpha_i < x_k < \beta_i\}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

შევნიშნოთ, რომ  $B_k$  შეიცავს არაუმეტეს ერთ ელემენტს და თუ  $i \in B_k$ , მაშინ  $\alpha_i \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $\beta_i \in [x_k, x_{k+1}]$ . აქედან

$$|f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} \leq (|f(\beta_i) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(\alpha_i)|)^{p_n} \leq$$

$$(V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{k-1}, x_k]) + V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_k, x_{k+1}]))^{p_n} < \left( \frac{2\varepsilon}{16} \right)^{p_n}.$$

რადგან  $\frac{1}{p_n} \leq 1$ , მივიღებთ



$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i=1}^s |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} = \\
& \left( \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i \in A_k} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} + \sum_{i \in B_k} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^{p_n} \right) \right)^{\frac{1}{p_n}} < \\
& \left( \sum_{k=1}^m \left( \frac{6\varepsilon}{16} \right)^{p_n} + \sum_{k=1}^m \left( \frac{2\varepsilon}{16} \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq \\
& \left( \sum_{k=1}^m \left( \frac{6\varepsilon}{16} \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} + \left( \sum_{k=1}^m \left( \frac{2\varepsilon}{16} \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}}.
\end{aligned}$$

ამასთან,  $\frac{1}{\phi(n)} \leq \beta_i - \alpha_i < \delta \leq \frac{1}{\phi(r)}$ . აქედან გამომდინარე  $n > r$ . რადგან  $m^{\frac{1}{pr}} < 2$ , უკანასკნელი წევრი არ გადააჭარბებს შემდეგ გამოსახულებას:

$$m^{\frac{1}{pn}} \cdot \frac{8\varepsilon}{16} < m^{\frac{1}{pr}} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

**შენიშვნა 1.7** და **თეორემა 1.10** -დან გამომდინარეობს, რომ  $AC(p_n \uparrow \infty, \phi) \subset BV(p_n \uparrow \infty, \phi)$ .

**თეორემა 1.11.** თუ  $f$  აბსოლუტურად უწყვეტია, მაშინ  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi)$ .

**დამტკიცება:** ვთქვათ, მოცემულია  $\varepsilon > 0$ . მაშინ არსებობს ისეთი  $\delta > 0$  რიცხვი, რომ ყოველი არაგადამფარავი  $(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  ინტერვალებისთვის სრულდება უტოლობა

$$\sum_{i=1}^m |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon,$$

როდესაც  $\sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) < \delta$ .

თუ  $x_2 - x_1 < \delta$ , მაშინ ყოველი  $x_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = x_2$  დანაწილებისთვის გვაქვს  $x_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = x_2$ . აქედან დავასკვნით, რომ

$$\left( \sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq \sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \varepsilon.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_1, x_2]) \leq \varepsilon$ .

**თეორემა 1.10** -დან მივიღებთ, რომ  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi)$ .

□

**თეორემა 1.12.** თუ  $\phi(n)^{\frac{1}{p_n}}$  შემოსაზღვრულია, მაშინ  $[a, b]$  ინტერვალზე განსაზღვრული ყოველი უწყვეტი ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ.

**დამტკიცება:** ვთქვათ, რაიმე დადებით  $C$  მუდმივისთვის  $\phi(n)^{\frac{1}{p_n}} \leq C$  და  $f$  უწყვეტია  $[a, b]$  ინტერვალზე. ცხადია,  $f$  არის თანაბრად უწყვეტი. თუ  $\varepsilon > 0$  მოცემულია, მაშინ არსებობს ისეთი  $\delta (0 < \delta < 1)$ , რომ

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \frac{\varepsilon}{2C}, \text{ როცა } t_1 - t_2 < \delta.$$

ვთქვათ,  $[x_1, x_2] \subset [a, b]$  და  $x_2 - x_1 < \delta$ . თუ  $x_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = x_2$  არის რაიმე დანაწილება, სადაც  $t_i - t_{i-1} \geq \frac{1}{\phi(n)}$ . მაშინ, ცხადია,  $m \leq \delta \phi(n) < \phi(n)$  და

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} &< \left( \sum_{i=1}^m \left( \frac{\varepsilon}{2C} \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} = \\ m^{\frac{1}{p_n}} \frac{\varepsilon}{2C} &\leq \phi(n)^{\frac{1}{p_n}} \frac{\varepsilon}{2C} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

ეს ნიშნავს, რომ  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_1, x_2]) < \varepsilon$  და **თეორემა 1.10**-ის ძალით  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ.

□

**თეორემა 1.13.** თუ  $\phi(n)^{\frac{1}{p_n}}$  არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც არ არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ.

**დამტკიცება:** რადგან  $\phi(n)^{\frac{1}{pn}}$  არ არის შემოსაზღვრული, ამიტომ ყოველი დადებითი მთელი  $k$  რიცხვისთვის არსებობს ისეთი დადებითი მთელი  $n_k$  რიცხვი, რომ

$$(1.6) \quad \left[ \frac{\phi(n_k)}{4k(k+1)} \right]^{\frac{1}{pn_k}} > k.$$

ვთქვათ,  $c_k = \frac{1}{k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , და  $\lambda_k = \left[ \frac{\phi(n_k)}{4k(4+1)} \right]$ . განვიხილოთ  $[0, 1]$  -ზე უწყვეტი შემდეგი ფუნქცია:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda_k^{-\frac{1}{pn_k}} \sin \left( 2\lambda_k \pi \frac{t - c_{k+1}}{c_k - c_{k+1}} \right), & \text{როცა } t \in [c_{k+1}, c_k], \\ 0, & \text{როცა } t = 0. \end{cases}$$

ვთქვათ,  $x_i^k = c_{k+1} + i \frac{c_k - c_{k+1}}{4\lambda_k}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 4\lambda_k$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ  $x_0^k = c_{k+1}$ ,  $x_{4\lambda_k}^k = c_k$  და

$$(1.7) \quad f(x_i^k) = \lambda_k^{-\frac{1}{pn_k}} \sin \left( i \frac{\pi}{2} \right).$$

(1.6)-დან

$$(1.8) \quad x_i^k - x_{i-1}^k = \frac{c_k - c_{k+1}}{4\lambda_k} \geq \frac{1}{k(k+1)} \cdot \frac{4\phi(n_k)}{4k(k+1)} = \frac{1}{\phi(n_k)}.$$

(1.7) და (1.8) უტოლობებიდან კი მივიღებთ:

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{k+1}, c_k]) \geq \left( \sum_{i=1}^{4\lambda_k} |f(x_i^k) - f(x_{i-1}^k)|^{p_{n_k}} \right)^{\frac{1}{pn_k}} =$$

$$\left( \sum_{i=1}^{4\lambda_k} \left( \lambda_k^{-\frac{1}{pn_k}} \right)^{p_{n_k}} \right)^{\frac{1}{pn_k}} = \lambda_k^{-\frac{1}{pn_k}} \cdot (4\lambda_k)^{\frac{1}{pn_k}} > 1.$$

**თეორემა 1.10** -დან გამომდინარეობს, რომ  $f$  არ არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ.

□

**ლემა 1.14.** თუ  $AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  კლასის  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  ფუნქციათა მიმდევრობა ვარიაციის აზრით კრებადია  $f$ -კენ, მაშინ  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ .

**დამტკიცება:** ვთქვათ, მოცემულია  $\varepsilon > 0$ , მაშინ არსებობს ისეთი  $N$  ნატურალური რიცხვი, რომ ყოველი  $k > N$ -თვის

$$V(f_k - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

ვთქვათ,  $k_0 > N$ . რადგან  $f_{k_0}$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ, ამიტომ არსებობს ისეთი  $\delta > 0$ , რომ

$$V(f_{k_0}, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < \frac{\varepsilon}{4},$$

როცა  $t_2 - t_1 < \delta$ . აქედან, **თეორემა 1.2** და **შენიშვნა 1.6**-დან გვაქვს

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) \leq$$

$$V(f - f_{k_0}, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) + V(f_{k_0}, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) \leq \varepsilon.$$

მაშასადამე, **თეორემა 1.10** -დან დავასკვნით, რომ  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ .

□

**ლემა 1.14**-ში ვარიაციის აზრით კრებადობა არ შეიძლება შევცვალოთ თანაბარი კრებადობით. მართლაც, **თეორემა 1.13**-ში აგებული უწყვეტი ფუნქციის ფეიერის  $(C, 1)$  საშუალოები ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ თანაბრად კრებადია  $f$  ფუნქციისკენ, მაგრამ  $f \notin AC(p_n \uparrow \infty, \phi)$ .

**ლემა 1.15.** ვთქვათ,  $f$  განსაზღვრულია  $[a, b]$  ინტერვალზე,  $[c, d] \subset [a, b]$  და  $f(c) = f(d) = 0$ . თუ

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [c, d] \\ 0, & t \in [a, b] \setminus [c, d] \end{cases}$$

მაშინ

$$V(g, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \leq 5 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]).$$

**დამტკიცება:** **ლემა 1.4** -დან,  $[a, b]$  ინტერვალის ყოველი დანაწილებისთვის, რომლისთვისაც  $t_{k-1} < c \leq t_k$  და  $t_{r-1} \leq d < t_r$ , მივიღებთ

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i=1}^m |g(t_i) - g(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq \\
& \left( \sum_{i=k+1}^{r-1} |g(t_i) - g(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} + |g(t_k) - g(t_{k-1})| + |g(t_r) - f(t_{r-1})| = \\
& \left( \sum_{i=k+1}^{r-1} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} + |f(t_k) - f(c)| + |f(d) - f(t_{r-1})| \leq \\
& 5 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]).
\end{aligned}$$

□

**ლემა 1.16.** ვთქვათ,  $f$  განსაზღვრულია  $[a, b]$  ინტერვალზე, ხოლო  $\{c_i\}_1^\infty$  ისეთი რიცხვითი მიმდევრობაა, რომ  $c_i \downarrow a$ ,  $c_1 = b$  და  $f(c_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . მაშინ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \leq 5 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{i+1}, c_i]).$$

**დამტკიცება:** ვთქვათ,

$$f_i(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [c_{i-1}, c_i] \\ 0, & t \notin [c_{i-1}, c_i]. \end{cases}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ  $[a, b]$  ინტერვალზე  $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$  და **თეორემა 1.2(დ)** - დან

$$\begin{aligned}
V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) & \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} V\left(\sum_{i=1}^k f_i, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]\right) \leq \\
& \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k V(f_i, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \leq \sum_{i=1}^{\infty} V(f_i, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]).
\end{aligned}$$

**ლემა 1.15-**დან მივიღებთ

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \leq 5 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{i+1}, c_i]).$$

**ლემა 1.17.** ვთქვათ,  $f$  არის პერიოდული ფუნქცია პერიოდით  $h$ . მაშინ ყოველი  $a$ -თვის

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + mh]) \leq 4m^{\frac{1}{p_r}} \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + h]),$$

$$\text{სადაც } mh < \frac{1}{\phi(r-1)}.$$

**დამტკიცება:** ცხადია, რომ ყოველი  $t_1$ -სა და  $t_2$ -თვის, რომლებიც ეკუთვნის  $[a, a + mh]$  ინტერვალს, გვაქვს

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + h]).$$

ვთქვათ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_s = a + mh$  არის რაიმე დანაწილება, რომლისთვისაც  $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{1}{\phi(n)}, i = 1, 2, \dots, s$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ  $n \geq r$ . დავუშვათ, რომ

$$A_k := \{i: [t_{i-1}, t_i] \subset [a + (k-1)h, a + kh]\}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

$f$ -ის პერიოდულობისა და **ლემა 1.4**-ის ძალით გვაქვს

$$\sum_{i \in A_k} |f(t_{i-1}) - f(t_i)|^{p_n} \leq (3V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + h]))^{p_n}.$$

ვთქვათ,

$$B_k := \{i: t_{i-1} < x_k < t_i\}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

$B_k$  შეიცავს არაუმეტეს ერთ წერტილს. თუ  $i \in B_k$ , მაშინ

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a + h]).$$

მაშასადამე, მივიღებთ

$$\left( \sum_{i=1}^s |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq \left( \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i \in A_k} |f(t_{i-1}) - f(t_i)|^{p_n} + \sum_{i \in B_k} |f(t_{i-1}) - f(t_i)|^{p_n} \right) \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq$$

$$\left( \sum_{k=1}^m (3 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a+h]))^{p_n} + (V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a+h]))^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq$$

$$4 \cdot m^{\frac{1}{p_n}} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a+h]) \leq 4 \cdot m^{\frac{1}{p_r}} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, a+h]).$$

□

**თეორემა 1.18.** ყოველი  $q \geq 1$ -თვის არსებობს ფუნქცია, რომელიც არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ, მაგრამ არ ეკუთვნის  $V_q$  კლასს, სადაც  $V_q$  არის ვინერ-იუნგის  $q$ -განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციის კლასი.

**დამტკიცება:** ვთქვათ,  $[c_{k+1}, c_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , განვიხილოთ  $[0, 1]$ -ზე განსაზღვრული შემდეგი ფუნქცია:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{k^2} \sin \left( 2k^{[3q]} \pi \frac{t - c_{k+1}}{c_k - c_{k+1}} \right), & \text{როცა } t \in [c_{k+1}, c_k], \\ 0, & \text{როცა } t = 0. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია ყოველ  $[c_{k+1}, c_k]$  ინტერვალზე პერიოდულია, პერიოდით  $h := \frac{c_k - c_{k+1}}{k^{[3q]}}$ ,  $f(c_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , და

$$(1.9) \quad V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{k+1}, c_{k+1} + h]) \leq \frac{4}{k^2}.$$

ვთქვათ,  $r$  არის უმცირესი დადებითი მთელი რიცხვი, რომლისთვისაც  $p_r > 3q$ , მაშინ  $2 - \frac{[3q]}{p_r} > 1$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ  $c_{k+1} + k^{[3q]}h = c_k$ . თუ  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > \frac{1}{\phi(r-1)}$ , მაშინ (1.9) უტოლობიდან და **ლემა 1.17**-დან გამომდინარეობს, რომ

$$(1.10) \quad V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{k+1}, c_k]) \leq 4k^{\frac{[3q]}{p_r}} \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{k+1}, c_{k+1} + h]) \leq$$

$$4k^{\frac{[3q]}{p_r}} \cdot \frac{4}{k^2} \leq \frac{16}{k^{2 - \frac{[3q]}{p_r}}}.$$

**ლემა 1.15**-დან მივიღებთ

$$V(f - s_k, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \leq 5 \cdot V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [0, c_{k+1}]).$$

(1.10)-დან და **ლემა 1.16**-დან გამომდინარეობს, რომ უკანასკნელი გამოსახულების მარჯვენა მხარე არ გადააჭარბებს შემდეგ სიდიდეს:

$$25 \cdot \sum_{j=k+1}^{\infty} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [c_{j+1}, c_j]) \leq 25 \cdot \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{16}{k^{2-\frac{[3q]}{p_r}}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

ეს ნიშნავს, რომ  $s_k$  ვარიაციის აზრით კრებადია  $f$ -კენ, ამასთან ყოველი  $s_k$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი, ამიტომ **თეორემა 1.11**-დან მივიღებთ, რომ  $s_k$  ეკუთვნის  $AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [0,1])$  კლასს. ამ მსჯელობიდან და **ლემა 1.14** -დან გამომდინარეებს, რომ  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ.

ვთქვათ,  $x_i^k = c_{k+1} + i \frac{h}{4}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 4k^{[3q]}$  მაშინ  $f(x_i^k) = \frac{1}{k^2} \sin\left(i \frac{\pi}{2}\right)$  და

$$(1.11) \quad \sum_{i=1}^{4k^{[3q]}} |f(x_i^k) - f(x_{i-1}^k)|^q = \sum_{i=1}^{4k^{[3q]}} \left(\frac{1}{k^2}\right)^q = 4k^{[3q]} \cdot \frac{1}{k^{2q}} > 1.$$

ყოველი ნატურალური  $M$ -თვის არსებობს ისეთი ნატურალური  $N$  რიცხვი, რომ  $N^{\frac{1}{q}} \geq M$ . თუ დანაწილების ელემენტებად განვიხილავთ წერტილებს  $x_i^k$ ,  $i = 0, 1, \dots, 4k^{[3q]}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , მაშინ (1.11) შეფასებიდან მივიღებთ

$$V_q(f, [0,1]) \geq \left( \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{4k^{[3q]}} |f(x_i^k) - f(x_{i-1}^k)|^q \right)^{\frac{1}{q}} > \left( \sum_{k=1}^N 1 \right)^{1/q} = N^{1/q} \geq M.$$

ეს ნიშნავს, რომ  $f$  არ ეკუთვნის  $V_q([0,1])$  კლასს.

□

## 1.5. აპროქსიმაცია სტეკლოვის ფუნქციებით

**ლემა 1.19.** ვთქვათ,  $\{g_h: h \geq 0\}$  არის  $[a, b]$  ინტერვალზე განსაზღვრული ფუნქციათა სიმრავლე, რომლისთვისაც სრულდება პირობები:



i) ყოველი  $\varepsilon > 0$ -თვის, არსებობს ისეთი ნატურალური  $N$ , რომ ყოველი  $h > N$ -სა და ყოველი  $t \in [a, b]$ -თვის, გვაქვს  $g_h(t) < \varepsilon$ ;

ii) ყოველი  $\varepsilon > 0$  -თვის არსებობს  $[a, b]$  ინტერვალის ფიქსირებული დანაწილება  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_r = b$  და ნატურალური რიცხვი  $N$ , რომ ყოველი  $h > N$ -თვის

$$V(g_h, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

მაშინ

$$V(g_h, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow \infty.$$

**დამტკიცება:** ვთქვათ,  $\varepsilon > 0$  მოცემულია. (ii) პირობის ძალით არსებობს ფიქსირებული დანაწილება  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_r = b$  და ნატურალური  $N_1$ , რომ ყოველი  $h > N_1$ -თვის სამართლიანია შეფასება:

$$(1.12) \quad V(g_h, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{10}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

ვთქვათ,  $l$  არის ისეთი უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომ  $r^{\frac{1}{pl}} \leq 2$  და  $\phi(l) \geq \frac{5}{b-a}$ .

(i) პირობის გათვალისწინებით არსებობს ისეთი  $N_2$ , რომ ყოველი  $h > N_2$ -თვის

$$(1.13) \quad g_h(t) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)\phi(l)}, \quad t \in [a, b].$$

ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$V(g_h, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) < \varepsilon,$$

როცა  $h > N = \max\{N_1, N_2\}$ .

ვთქვათ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება და  $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{1}{\phi(n)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

შემთხვევა 1:  $n \leq l$ , მაშინ  $b - a = \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) \geq \sum_1^m \frac{1}{\phi(n)} = \frac{m}{\phi(n)}$ . აქედან

მივიღებთ

$$(1.14) \quad m \leq (b - a)\phi(n) \leq (b - a)\phi(l).$$

(1.13)-ის ძალით

$$\begin{aligned} |g_h(t_i) - g_h(t_{i-1})| &\leq |g_h(t_i)| + |g_h(t_{i-1})| \leq \\ &\frac{\varepsilon}{2(b-a)\phi(l)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)\phi(l)} = \frac{\varepsilon}{(b-a)\phi(l)}. \end{aligned}$$

უკანასკნელი გამოსახულებიდან და (1.14)-დან მივიღებთ

$$\left( \sum_{i=1}^m |g_h(t_i) - g_h(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq m^{\frac{1}{p_n}} \frac{\varepsilon}{(b-a)\phi(l)} < m \frac{\varepsilon}{(b-a)\phi(l)} \leq \varepsilon.$$

შემთხვევა 2 :  $n > l$ . ვთქვათ,

$$A_k := \{i: [t_{i-1}, t_i] \subset [x_{k-1}, x_k]\}, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

(1.12) და ლემა 1.4-დან მივიღებთ

$$(1.15) \quad \sum_{i \in A_k} |g_h(t_{i-1}) - g_h(t_i)|^{p_n} \leq (3V(g_h, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{k-1}, x_k]))^{p_n} < \left(\frac{3\varepsilon}{10}\right)^{p_n}.$$

ვთქვათ,

$$B_k := \{i: t_{i-1} < x_k < t_i\}, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

შევნიშნოთ, რომ  $B_k$  შეიცავს არაუმეტეს ერთ წერტილს. თუ  $i \in B_k$ , მაშინ

$$|g_h(t_i) - g_h(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{(b-a)\phi(l)}.$$

აქედან და (1.15)-დან მივიღებთ

$$\left( \sum_{i=1}^m |g_h(t_i) - g_h(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} =$$

$$\left( \sum_{k=1}^r \left( \sum_{i \in A_k} |g_h(t_{i-1}) - g_h(t_i)|^{p_n} + \sum_{i \in B_k} |g_h(t_{i-1}) - g_h(t_i)|^{p_n} \right) \right)^{\frac{1}{p_n}} <$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^r \left( \left( \frac{3\varepsilon}{10} \right)^{p_n} + \left( \frac{\varepsilon}{(b-a)\phi(l)} \right)^{p_n} \right) \right\}^{\frac{1}{p_n}} \leq r^{\frac{1}{p_n}} \left( \frac{3\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{(b-a)\phi(l)} \right) \leq \varepsilon.$$

ეს ნიშნავს, რომ

$$V(g_h, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0, h \rightarrow \infty.$$

□

**ლემა 1.20.** ვთქვათ,  $f$  არის პერიოდული ფუნქცია პერიოდით  $b - a$  და არსებობს ისეთი  $\varepsilon > 0$  და  $\delta > 0$  რიცხვები, რომ ყოველი  $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ -თვის

$$V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < \varepsilon,$$

სადაც  $t_2 - t_1 < \delta$ . მაშინ ყოველი ნამდვილი  $h$ -თვის

$$V(f^h, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < 8\varepsilon,$$

სადაც  $f^h(t) = f(h + t)$  და  $t_2 - t_1 < \delta$ ,  $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ .

**დამტკიცება:** რადგან  $f$  არის პერიოდული, საკმარისია განვიხილოთ მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა  $0 < h < b - a$ .

გვაქვს ორი შემთხვევა:

თუ  $b \notin [t_1 + h, t_2 + h]$ ,  $f$ -ის პერიოდულობიდან მივიღებთ, რომ

$$V(f^h, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) = V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1 + h, t_2 + h]) < \varepsilon.$$

თუ  $b \in [t_1 + h, t_2 + h]$ , შენიშვნა 1.7-დან

$$\begin{aligned} V(f^h, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) &= V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1 + h, t_2 + h]) \leq \\ &\leq 4V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1 + h, b]) + 4V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [b, t_2 + h]) < 8\varepsilon. \end{aligned}$$

□

**ლემა 1.21.** თუ  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ  $[a, b]$  ინტერვალზე, პერიოდულია პერიოდით  $b - a$ , მაშინ  $V(f^h - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0$ , როცა  $h \rightarrow 0 +$ , სადაც  $f^h(t) = f(h + t)$ .

**დამტკიცება:** ვთქვათ,  $g_{1/h} := f^h - f$ . საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ  $g_{1/h}$  ფუნქციები აკმაყოფილებს **ლემა 1.19**-ის პირობებს.

1) რადგან  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ  $[a, b]$  ინტერვალზე, ის არის თანაბრად უწყვეტი  $[a, b]$  ინტერვალზე. მაშინ ყოველი  $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს ისეთი  $\delta > 0$  რიცხვი, რომ  $|f(t + h) - f(t)| < \varepsilon$ , როდესაც  $h < \delta$ .

2) ვთქვათ,  $\varepsilon > 0$  მოცემულია. რადგან  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ, ამიტომ არსებობს ისეთი  $\eta > 0$ , რომ  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < \frac{\varepsilon}{9}$ , როცა  $t_2 - t_1 < \eta$ .

ვთქვათ,  $a = x_0 < \dots < x_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის ისეთი დანაწილება, რომ  $x_i - x_{i-1} < \eta$ , მაშინ  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{9}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  და **ლემა 1.20**-ის ძალით

$$V\left(g_{\frac{1}{h}}, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]\right) \leq$$

$$V(f^h, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) + V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon.$$

მივიღეთ, რომ  $g_{\frac{1}{h}}$  აკმაყოფილებს **ლემა 1.19**-ის პირობებს, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ  $V(f^h - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0$ , როცა  $h \rightarrow 0 +$ .

□

**თეორემა 1.22.** ვთქვათ,  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  ფუნქცია პერიოდულია, პერიოდით  $b - a$ . მაშინ  $f$  ფუნქციის  $f_k$  სტეკლოვის ფუნქციების მიმდევრობა, რომელიც განსაზღვრულია ფორმულით

$$f_k(t) = k \int_t^{t+\frac{1}{k}} f(\tau) d\tau$$

ვარიაციის აზრით კრებადია  $f(t)$  ფუნქციისკენ.

**დამტკიცება:** ვთქვათ,  $\varepsilon > 0$  მოცემულია, მაშინ **ლემა 1.21**-დან არსებობს ისეთი  $\delta > 0$  რიცხვი, რომ

$$(1.16) \quad V(f^h - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) < \varepsilon, \quad h < \delta,$$

სადაც  $f^h(t) = f(h + t)$ . რადგან  $|x|^p, p \geq 1$ , არის ამოზნექილი ფუნქცია, იენსენის უტოლობის ძალით გვექნება

$$(1.17) \quad \left| k \int_0^{\frac{1}{k}} g(t) dt \right|^{p_n} \leq k \int_0^{\frac{1}{k}} |g(t)|^{p_n} dt.$$

ვთქვათ,  $\frac{1}{k} < \delta$  და  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის რაიმე დანაწილება. (1.16) და (1.17)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^m |(f_k - f)(t_i) - (f_k - f)(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} = \\ & \left( \sum_{i=1}^m \left| k \int_0^{\frac{1}{k}} (f(t_i + \tau) - f(t_i) - f(t_{i-1} + \tau) + f(t_{i-1})) d\tau \right|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq \\ & \left( k \int_0^{\frac{1}{k}} \sum_{i=1}^m |f(t_i + \tau) - f(t_i) - f(t_{i-1} + \tau) + f(t_{i-1})|^{p_n} d\tau \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq \\ & \left( k \int_0^{\frac{1}{k}} V(f^\tau - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])^{p_n} d\tau \right)^{\frac{1}{p_n}} < \left( k \int_0^{\frac{1}{k}} \varepsilon^{p_n} d\tau \right)^{\frac{1}{p_n}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს,  $V(f_k - f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) < \varepsilon$ , როცა  $\frac{1}{k} < \delta$ .

□

თუ  $f$  არის ინტეგრებადი ფუნქცია  $[a, b]$  ინტერვალზე, მაშინ მისი სტეკლოვის  $f_k$  ფუნქციები აბსოლუტურად უწყვეტია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ  $f_k \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ . მაშასადამე, **ლემა 1.14**-დან, თუ  $V(f_k - f, p_n \uparrow \infty, \phi) \rightarrow 0$ , მაშინ  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ .

## 1.6 აპროქსიმაცია სინგულარული ინტეგრალებით

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ პერიოდული და  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტი  $f$  ფუნქციის ვარიაციის აზრით აპროქსიმაციის ამოცანას შემდეგი სახის ინტეგრალებით:

$$I_q(t) = \int_a^b K_q(\tau) f(t + \tau) d\tau.$$

**ლემა 1.23.** ვთქვათ,  $f$  არის პერიოდული ფუნქცია, პერიოდით  $b - a$ ,  $K_q$  არის ისეთი ფუნქცია, რომ  $\int_a^b |K(t)| dt = \theta$  და  $I(t) = \int_a^b K(\tau) f(t + \tau) d\tau$ . მაშინ

$$V(I, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]) \leq \theta \cdot \sup_{\tau \in [a, b]} V(f^\tau, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d])$$

ყოველი  $[c, d]$  ინტერვალისთვის, სადაც  $f^\tau(t) = f(t + \tau)$ .

**დამტკიცება:** ვთქვათ,  $c = t_0 < t_1 < \dots < t_m = d$  არის რაიმე დანაწილება და  $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{1}{\phi(n)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . მაშინ

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^m |I(t_i) - I(t_{i-1})|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} = \\ & \left( \sum_{i=1}^m \left| \int_a^b K(\tau) (f(t_i + \tau) - f(t_{i-1} + \tau)) d\tau \right|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \\ & \leq \left( \sum_{i=1}^m \left( \int_a^b |K(\tau)| \cdot |f(t_i + \tau) - f(t_{i-1} + \tau)| d\tau \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}}. \end{aligned}$$

იენსენის უტოლობით, უკანასკნელი წევრი არ გადააჭარბებს შემდეგ გამოსახულებას

$$\left( \sum_{i=1}^m \theta^{p_n} \cdot \frac{\int_a^b |K(\tau)| \cdot |f(t_i + \tau) - f(t_{i-1} + \tau)|^{p_n} d\tau}{\theta} \right)^{\frac{1}{p_n}} =$$

$$\frac{\theta}{\theta^{\frac{1}{p_n}}} \left( \int_a^b |K(\tau)| \cdot \sum_{i=1}^m |f(t_i + \tau) - f(t_{i-1} + \tau)|^{p_n} d\tau \right)^{\frac{1}{p_n}} \leq$$

$$\frac{\theta}{\theta^{\frac{1}{p_n}}} \cdot \sup_{\tau \in [a, b]} V(f^\tau, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]) \cdot \left( \int_a^b |K(\tau)| d\tau \right)^{\frac{1}{p_n}} =$$

$$\theta \cdot \sup_{\tau \in [a, b]} V(f^\tau, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]).$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$V(I, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]) \leq \theta \cdot \sup_{\tau \in [a, b]} V(f^\tau, p_n \uparrow \infty, \phi, [c, d]).$$

□

**თეორემა 1.24.** ვთქვათ,  $\int_a^b |k_q(t)| dt = \theta_q, q = 1, 2, \dots$ , და  $(\theta_q)$  შემოსაზღვრულია;  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ, პერიოდულია პერიოდით  $b - a$  და  $I_q(t) = \int_a^b K_q(\tau) f(t + \tau) d\tau$ . თუ რაიმე  $\xi$ -თვის ფუნქციათა  $I_q(t)$  მიმდევრობა თანაბრად კრებადია  $f^\xi(t)$ -კენ, მაშინ

$$V(I_q - f^\xi, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0, q \rightarrow \infty,$$

სადაც  $f^\xi(t) = f(t + \xi)$ .

**დამტკიცება:** საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ  $I_q - f^\xi, q = 1, 2, \dots$  მიმდევრობა აკმაყოფილებს **ლემა 1.19**-ის *ii*) პირობას.

ვთქვათ,  $\theta_q \leq C, q = 1, 2, \dots$ , და  $\varepsilon > 0$ . რადგან  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $((p_n), \phi)$ -ის მიმართ, ამიტომ არსებობს ისეთი  $\eta > 0$ , რომ  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [t_1, t_2]) < \frac{\varepsilon}{8(C+1)}$  ყოველი  $t_2 - t_1 < \eta$ -თვის.

დავუშვათ, რომ  $a = x_0 < \dots < x_m = b$  არის  $[a, b]$  ინტერვალის ისეთი დანაწილება, რომ  $x_i - x_{i-1} < \eta$ , მაშინ  $V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{8(C+1)}, i = 1, 2, \dots, m$ , და **ლემა 1.20**-დან

$$V(f^h, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{(C+1)}, i = 1, 2, \dots,$$

ყოველი ნამდვილი  $h$ -თვის. **ლემა 1.23**-ის ძალით

$$V(I_q, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) \leq$$

$$\theta_q \cdot \sup_{\tau \in [a, b]} V(f^\tau, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) \leq \frac{C\varepsilon}{C+1}.$$

უკანასკნელი ორი უტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$V(I_q - f^\xi, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) \leq$$

$$V(I_q, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) + V(f^\xi, p_n \uparrow \infty, \phi, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{C\varepsilon}{C+1} + \frac{\varepsilon}{(C+1)} = \varepsilon,$$

ყოველი  $i = 1, 2, \dots, m$ -თვის.

□

**შედეგი 1.25.** ვთქვათ,  $f$  არის პერიოდული ფუნქცია პერიოდით  $2\pi$  და  $\sigma_n^\alpha(f)$  არის ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ მისი ფურიეს მწკვრივების  $(C, \alpha)$  საშუალოები ( $\alpha > 0$ ).

$\sigma_n^\alpha(f)$  ვარიაციის აზრით კრებადია  $f$ -კენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi)$ .

**დამტკიცება:** პირობის საკმარისობა გამომდინარეობს **თეორემა 1.24**-დან.

აუცილებლობა. რადგან  $\sigma_n^\alpha(f)$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი, ამიტომ  $\sigma_n^\alpha(f) \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi)$ . **ლემა 1.14**-დან დავასკვნით, რომ თუ  $\sigma_n^\alpha(f)$  ვარიაციის აზრით კრებადია  $f$ -კენ, მაშინ  $f$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი  $(p_n, \phi)$ -ის მიმართ.

□

**შედეგი 1.26.** ვთქვათ,  $K_q(t) \geq 0$ ,  $\int_a^b K_q(t) dt \rightarrow 1$ , როცა  $q \rightarrow \infty$  და  $\int_{a+\delta}^{b-\delta} K_q(t) dt \rightarrow 0$ , როცა  $q \rightarrow \infty$ , ყოველი  $0 < \delta < \frac{1}{2}(b-a)$ -თვის და  $f$  არის პერიოდული ფუნქცია პერიოდით  $b-a$ .

თუ  $f \in AC(p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b])$ , მაშინ  $V(I_q - f^a, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \rightarrow 0$ , როცა  $q \rightarrow \infty$ , სადაც  $f^a(t) = f(t+a)$ .



## თავი II. განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციათა ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივები

### 2.1 შესავალი

წინა თავში ჩვენ განვიხილეთ  $(p(n), \phi)$ -აბსოლუტურად უწყვეტობა და შევისწავლეთ მისი თვისებები. კერძოდ, განზოგადებული აბსოლუტურად უწყვეტობის კავშირი ჩვეულებრივ აბსოლუტურად უწყვეტობასთან და შევისწავლეთ სტეკლოვის ფუნქციებითა და სინგულარული ინტეგრალებით მიახლოების პრობლემები.

**განსაზღვრება 1. 8**-ში განხილული იყო  $AC(p(n) \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  კლასი. რადგან ყოველი  $(p(n), \phi)$ -აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია არის უწყვეტი (იხილეთ **შენიშვნა 1. 7** და **თეორემა 1. 10**) მარტივად შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ სამართლიანია ჩართვა:  $AC(p(n) \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \subset BV(p(n) \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \cap C[a, b]$ .

**თეორემა 1. 12**-ში დამტკიცებულია, რომ თუ  $\phi(n)^{\frac{1}{p(n)}}$  შემოსაზღვრულია, მაშინ  $[a, b]$ -ზე ყოველი უწყვეტი ფუნქცია არის  $(p(n), \phi)$ -აბსოლუტურად უწყვეტი. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში  $AC(p(n) \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  კლასი ემთხვევა უწყვეტ ფუნქციათა  $C[a, b]$  კლასს. უფრო მეტიც, თუ  $\phi(n)^{\frac{1}{p(n)}}$  შემოსაზღვრულია, მაშინ **თეორემა 3** (იხილეთ [2])-ის ძალით

$$AC(p(n) \uparrow \infty, \phi, [a, b]) = BV(p(n) \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \cap C[a, b].$$

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ თუ  $\phi(n)^{\frac{1}{p(n)}}$  არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ  $AC(p(n) \uparrow \infty, \phi, [a, b])$  სიმრავლე არის  $BV(p(n) \uparrow \infty, \phi, [a, b]) \cap C[a, b]$  სიმრავლის საკუთრივი ქვესიმრავლე.

$2\pi$ -პერიოდული ფუნქციები  $AC(p(n) \uparrow \infty, \phi, [0, 2\pi])$  და  $BV(p(n) \uparrow \infty, \phi, [0, 2\pi])$  კლასებიდან აღვნიშნოთ შესაბამისად  $AC(p(n) \uparrow \infty, \phi)$  და  $BV(p(n) \uparrow \infty, \phi)$  სიმბოლოებით.

$AC(p(n) \uparrow \infty, \phi)$  კლასისთვის ჩვენ შევისწავლით ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ ფურიეს კოეფიციენტების რიგს. შემდეგ პარაგრაფში კი განვიხილავთ ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკვრივების თანაბრად კრებადობის კრიტერიუმს აღნიშნული კლასისთვის.

## 2.2 ფურიეს კოეფიციენტები

ნატურალურ რიცხვთა  $\mathbb{N}$  სიმრავლისთვის და რაიმე  $r$  ნამდვილი რიცხვისთვის გამოვიყენებთ აღნიშვნას(იხილეთ [1]):

$$\tau(r) = \min\{m: m \in \mathbb{N}, \phi(m) \geq r\}.$$

**თეორემა 2.1.** ვთქვათ,  $f$  არის  $2\pi$ -პერიოდული და  $(p(n), \phi)$ -აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ

$$(2.1) \quad |a_n(f)| = o(1)n^{-\frac{1}{p(\tau(n))}}; |b_n(f)| = o(1)n^{-\frac{1}{p(\tau(n))}},$$

სადაც  $a_n(f)$  და  $b_n(f)$  არის  $f$  ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ.

**დამტკიცება:** დავამტკიცოთ (2.1)-ის პირველი ნაწილი. მეორე ნაწილის დამტკიცება შესაძლებელია პირველის ანალოგიური ხერხით.

ვთქვათ,  $p(n) > 1$  და

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \sum_{i=1}^{2n} \int_{(i-1)\frac{\pi}{n}}^{i\frac{\pi}{n}} f(x) \cos nx dx = \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{n}} f\left(u + (i-1)\frac{\pi}{n}\right) \cos[nu + (i-1)\pi] du = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sum_{i=1}^{2n} f\left(u + (i-1)\frac{\pi}{n}\right) (-1)^{i-1} \cos n u du = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sum_{i=1}^{2n} \left[ f\left(u + (i-1)\frac{\pi}{n}\right) - f\left(u + i\frac{\pi}{n}\right) \right] \cos n u du, \end{aligned}$$

სადაც ნიშანი  $\Sigma'$  აღნიშნავს, რომ  $i$  მიიღებს მხოლოდ კენტ მნიშვნელობებს.

ჰელდერის უტოლობით მივიღებთ

$$|a_n(f)| \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} |\cos nu| \sum_{i=1}^{2n} ' \left| f\left(u + (i-1)\frac{\pi}{n}\right) - f\left(u + i\frac{\pi}{n}\right) \right| du \leq$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \left( \sum_{i=1}^{2n} ' \left| f\left(u + i\frac{\pi}{n}\right) - f\left(u + (i-1)\frac{\pi}{n}\right) \right|^{p(\tau(n))} \right)^{\frac{1}{p(\tau(n))}} \times \left( \sum_{i=1}^{2n} 1^{q(\tau(n))} \right)^{1/q(\tau(n))} du.$$

რადგან,  $f \in AC(p(n) \uparrow \infty, \phi)$ ,  $\left(u + (i-1)\frac{\pi}{n}, u + i\frac{\pi}{n}\right)$ ,  $i = 1, 3, \dots, 2n-1$ , არის არაგადამფარავი ინტერვალები  $[0, 2\pi]$ -დან და

$$\left( \sum_{i=1}^{2n} ' \left| \left(u + i\frac{\pi}{n}\right) - \left(u + (i-1)\frac{\pi}{n}\right) \right|^{p(\tau(n))} \right)^{\frac{1}{p(\tau(n))}} =$$

$$\left( \sum_{i=1}^{2n} ' \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{p(\tau(n))}} \right)^{\frac{1}{p(\tau(n))}} = \frac{\pi}{n} \cdot n^{\frac{1}{p(\tau(n))}} = \frac{\pi}{n^{\frac{1}{q(\tau(n))}}} \rightarrow 0 \text{ როცა } n \rightarrow \infty,$$

გამომდინარეობს, რომ

$$\left( \sum_{i=1}^{2n} \left| f\left(u + i\frac{\pi}{n}\right) - f\left(u + (i-1)\frac{\pi}{n}\right) \right|^{p(\tau(n))} \right)^{\frac{1}{p(\tau(n))}} = o(1).$$

ცხადია,  $(\sum_{i=1}^{2n} 1^{q(\tau(n))})^{1/q(\tau(n))} = n^{1/q(\tau(n))}$ . აქედან

$$|a_n(f)| \leq o(1) n^{\frac{1}{q(\tau(n))}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} du = o(1) n^{-\frac{1}{p(\tau(n))}}.$$

□

თ. ახოზაძემ [2] დაამტკიცა

**თეორემა 2.2.** ვთქვათ,  $1 \leq p(n) < \infty$  და  $(\phi(n))^{1/p(n)}$  მიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული. მაშინ არსებობს უწყვეტი  $f \in BV(p(n) \uparrow \infty, \phi)$  ფუნქცია და ნატურალურ რიცხვთა ისეთი  $(n_k)$  მიმდევრობა, რომ

$$a_{n_k}(f) = b_{n_k}(f) \geq C n_k^{-1/p(\tau(n_k))}, C > 0.$$

თეორემებიდან 2.1 და 2.2 გამომდინარეობს

**თეორემა 2.3.** თუ  $(\phi(n))^{1/p(n)}$  არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ არსებობს უწყვეტი  $f$  ფუნქცია  $BV(p(n) \uparrow \infty, \phi)$  კლასიდან, რომელიც არ არის  $(p(n), \phi)$ -აბსოლუტურად უწყვეტი.

### 2.3 ფურიეს მწკვრივების კრებადობის შესახებ

$\phi(n) = 2^n/2\pi$ -თვის კიტამ [8] განიხილა  $f \in BV(p(n) \uparrow \infty, 2^n/2\pi)$  ფუნქციის ფურიეს მწკვრივების თანაბარი კრებადობა. ლემა 3-ში (იხილეთ [1]) ნაჩვენებია, რომ  $BV(p(n) \uparrow \infty, 2^n/2\pi) = BV(p(n) \uparrow \infty, 2^n)$ . უკანასკნელი კლასი აღვნიშნოთ  $BV(p(n) \uparrow \infty)$  სიმბოლოთი. დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა [8]

**თეორემა 2.4.** ვთქვათ,  $f$  არის ფუნქცია  $BV(p(n) \uparrow \infty)$  კლასიდან. თუ  $p(2n) \leq Cp(n)$  ყოველი  $n \geq 1$ -თვის, სადაც  $C > 0$  არის კონსტანტა და

$$\omega(f, \pi/n) = o\left(\frac{1}{p([\log n]) \log p([\log n])}\right) \text{ როცა } n \rightarrow \infty,$$

მაშინ  $f$  ფუნქციის ფურიეს მწკვრევები თანაბრად კრებადია  $[0, 2\pi]$  ინტერვალში.

**თეორემა 2.4-ში** და შემდგომ  $\log_2$  აღნიშნულია  $\log$  სიმბოლოთი.

უ. გოგინავამ [6] დაამტკიცა შემდეგი თეორემა:

**თეორემა 2.5.** ვთქვათ,  $p(2n) \leq Cp(n)$  ყოველი  $n \geq 1$ -თვის, სადაც  $C > 0$  მუდმივია და  $p(n) \log p(n) = o(n)$ .  $H^\omega \cap BV(p(n) \uparrow \infty)$  კლასის ყოველი ფურიეს მწკვრივის თანაბარი კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს პირობა:

$$(2.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) p([\log n]) \log p([\log n]) = 0.$$

ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ უკანასკნელი თეორემა იქნება სამართლიანი თუ  $H^\omega \cap BV(p(n) \uparrow \infty)$  კლასის ნაცვლად განვიხილავთ  $AC(p(n) \uparrow \infty, 2^n/2\pi)$  კლასს. ანუ შემდეგი თეორემა არის სამართლიანი:

**თეორემა 2. 6.** ვთქვათ,  $p(2n) \leq Cp(n)$  ყოველი  $n \geq 1$ -თვის, სადაც  $C > 0$  მუდმივია და  $p(n) \log p(n) = o(n)$ .  $H^\omega \cap AC(p(n) \uparrow \infty, 2^n/2\pi)$  კლასის ყოველი ფუნქციის მწკრივის თანაბარი კრებადობისთვის აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს (2.2) პირობა.

**დამტკიცება:** ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ ფუნქცია, რომელიც აგებულია გოგინავას [6] მიერ არის  $(p(n), \phi)$ -აბსოლუტურად უწყვეტი. დამტკიცებაში ვიყენებთ მეთოდებს [6] -დან.

ვთქვათ,  $\{m_k; k \geq 1\}$ , არის დადებით მთელ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა, რომ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) p([\log n]) \log p([\log n]) =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega\left(\frac{1}{m_k}\right) p([\log m_k]) \log p([\log m_k]) = C_0 > 0.$$

ვთქვათ,  $n_1 \in \{m_k; k \geq 1\}$  ისეთია, რომ

$$\frac{\pi}{n_1} < \frac{\exp_2 \left\{ \left[ p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_1 \right] \right) \log p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_1 \right] \right) \right] \right\}}{n_1} \pi.$$

განვიხილოთ  $f_1$  ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი ფორმულით:

$$f_1(x) = \begin{cases} \omega\left(\frac{1}{n_1}\right) \sin n_1 x, & x \in \left[ \frac{\pi}{n_1}, \frac{\exp_2 \left\{ \left[ p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_1 \right] \right) \log p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_1 \right] \right) \right] \right\}}{n_1} \pi \right], \\ 0, & \text{სხვა } x \in [0, 2\pi] \text{-თვის,} \end{cases}$$

და  $f_1(x + 2\pi l) = f_1(x)$ , როცა  $l \in \mathbb{Z}$ . ვიგულისხმობთ, რომ, განსაზღვრულია  $n_1, \dots, n_{k-1}$  რიცხვები და აგებულია  $2\pi$ -პერიოდული  $f_1, \dots, f_{k-1}$  ფუნქციები, და განვიხილოთ  $n_k \in \{m_k; k \geq 1\}$  მთელი რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$n_k > n_{k-1},$$

$$(2.3) \quad \log p([\log n_k]) \geq k^2.$$

მეორეს მხვრივ, **თეორემა 2. 6**-ის  $p(n) \log p(n) = o(n)$  პირობიდან შეგვიძლია მივიღოთ, რომ

$$(2.4) \quad \frac{\exp_2 \left\{ p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_k \right] \right) \log p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_k \right] \right) \right\}}{n_k} \leq \frac{1}{n_{k-1}};$$

$$\frac{p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_k \right] \right) \log p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_k \right] \right)}{\log n_k} \leq \frac{1}{2}.$$

ცხადია, რომ  $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{f_i(t)}{t}$  არის ინტეგრებადი ფუნქცია  $[\pi/n_{k-1}, \pi]$  ინტერვალზე. მაშინ საკმარისად დიდი  $n_k$ -თვის გვაქვს:

$$(2.5) \quad \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{f_i(t)}{t} \chi_{\left[\frac{\pi}{n_{k-1}}, \pi\right]}(t) \sin(n_k t) dt \right| =$$

$$\left| \int_{\pi/n_{k-1}}^{\pi} \sum_{i=1}^{k-1} f_i(t) \frac{\sin n_k t}{t} dt \right| \leq \frac{1}{k},$$

სადაც  $\chi$  არის მახასიათებელი ფუნქცია.

განვიხილოთ  $f_k$  ფუნქცია, განსაზღვრული შემდეგი ფორმულით:

$$f_k(x) = \begin{cases} \omega \left( \frac{1}{n_k} \right) \sin n_k x, & x \in \left[ \frac{\pi}{n_k}, \frac{\exp_2 \left\{ p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_k \right] \right) \log p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_k \right] \right) \right\}}{n_k} \pi \right] \\ 0, & \text{სხვა } x \in [0, 2\pi] \text{-თვის,} \end{cases}$$

$$f_k(x + 2\pi l) = f_k(x), l \in \mathbb{Z}.$$

ვთქვათ,

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_0(0) = 0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ  $f_0 \in C([0, 2\pi])$ . ჯერ ვაჩვენოთ, რომ  $f_0 \in AC \left( p(n) \uparrow \infty, \frac{2^n}{2\pi} \right)$ .

ცხადია, რომ  $s_r(x) = \sum_{k=1}^r f_k(x)$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები და **ლემა 1.14**-დან გამომდინარეობს:  $s_r \in AC \left( p(n) \uparrow \infty, \frac{2^n}{2\pi} \right)$ .

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ  $f_0 \in AC \left( p(n) \uparrow \infty, \frac{2^n}{2\pi} \right)$ , ლემა 1.14-ის ძალით საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$V \left( \sum_{k=r+1}^{\infty} f_k, p(n) \uparrow \infty, \phi, \left[ 0, \frac{\pi}{n_r} \right] \right) \rightarrow 0,$$

როდესაც  $r \rightarrow \infty$ . ვთქვათ,  $\Delta: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \frac{\pi}{n_r}$  არის  $\left[ 0, \frac{\pi}{n_r} \right]$ -ის რაიმე დანაწილება და  $\rho(\Delta) \geq 2\pi/2^n$ . ფიქსირებული  $n$ -თვის, ჩვენ შეგვიძლია ავირჩიოთ  $n_{k-1}$  და  $n_k$  რომელთათვისაც სრულდება:  $n_r \leq n_{k-1} \leq 2^n < n_k$ . მაშინ სრულდება შემდეგი უტოლობები:

$$p(\lfloor \log n_{k-1} \rfloor) < p(n) \leq p(\lfloor \log n_k \rfloor).$$

რადგან

$$\text{supp} \sum_{i=k+1}^{\infty} f_i(t) \subset (0, \pi/n_k)$$

და

$$|t_j - t_{j-1}| > \frac{\pi}{n_k},$$

მივიღებთ

$$(2.6) \quad \left( \sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=k+1}^{\infty} [f_i(t_j) - f_i(t_{j-1})] \right|^{p(n)} \right)^{\frac{1}{p(n)}} \leq \omega \left( \frac{1}{n_{k+1}} \right).$$

მეორეს მხრივ,

$$I_r := \left( \sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=r}^{k-1} [f_i(t_j) - f_i(t_{j-1})] \right|^{p(n)} \right)^{\frac{1}{p(n)}} \leq \left( \sum_{i=r}^{k-1} \sum_{j=1}^m |f_i(t_j) - f_i(t_{j-1})|^{p(n)} \right)^{1/p(n)}.$$

მაშასადამე,  $f_0$  ფუნქციის აგებიდან და უტოლობიდან

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^p \leq \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right)^p \quad (a_k \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots, p \geq 1)$$

მივიღებთ

$$I_r \leq \left( \sum_{i=r}^{k-1} \omega \left( \frac{1}{n_i} \right)^{p(n)} 2^{\exp_2 \left\{ p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_i \right] \right) \log p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_i \right] \right) \right\}} \right)^{\frac{1}{p(n)}}.$$

ახლა შემდეგი უტოლობის

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k^p \quad (a_k \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots, 0 < p \leq 1)$$

გამოყენებით (2.3)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} I_r &\leq 2 \sum_{i=r}^{k-1} \omega \left( \frac{1}{n_i} \right) \exp_2 \left\{ \frac{p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_i \right] \right) \log p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_i \right] \right)}{p(n)} \right\} \leq \\ &2 \sum_{i=r}^{k-1} \omega \left( \frac{1}{n_i} \right) \exp_2 \left\{ \frac{p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_i \right] \right) \log p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_i \right] \right)}{p(\lceil \log n_{k-1} \rceil)} \right\} \leq \\ &2 \sum_{i=r}^{k-1} \omega \left( \frac{1}{n_i} \right) p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_i \right] \right) \leq C \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\log p(\lceil \log n_i \rceil)} \leq \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad C \sum_{i=r}^{\infty} \frac{1}{i^2} \rightarrow 0 \text{ როცა } r \rightarrow \infty.$$

ამჟამად, რომ

$$\left( \sum_{j=1}^m |f_k(t_j) - f_k(t_{j-1})|^{p(n)} \right)^{1/p(n)} \leq$$

$$(2.8) \quad C \omega \left( \frac{1}{n_k} \right) \left( \frac{2^n}{n_k} \exp_2 \left\{ p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_k \right] \right) \log p \left( \left[ \frac{1}{2} \log n_k \right] \right) \right\} \right)^{\frac{1}{p(n)}}.$$



$$C\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\left(\frac{2^n}{n_k}\exp_2\left\{p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)\log p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)\right\}\right)^{\frac{1}{p(n)}}.$$

ვთქვათ,  $\frac{1}{2}\log n_k < n \leq \log n_k$ . მაშინ მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2^n}{n_k}\exp_2\left\{p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)\log p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)\right\}\right)^{1/p(n)} \leq \\ & \exp_2\left\{\frac{p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)\log p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)}{p(n)}\right\} \leq \\ & \exp_2\left\{\frac{p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)\log p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)}{p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)}\right\} = \\ (2.9) \quad & \exp_2\left\{\log p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)\right\} = p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right). \end{aligned}$$

ვთქვათ,  $\log n_{k-1} < n \leq \frac{1}{2}\log n_k$  მაშინ (2.4)-დან

$$\begin{aligned} & \frac{2^n}{n_k}\exp_2\left\{p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)\log p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)\right\} = \\ & \frac{1}{n_k}\exp_2\left\{n + p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)\log p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)\right\} \leq \\ (2.10) \quad & \frac{1}{n_k}\exp_2\left\{\frac{1}{2}\log n_k + \frac{1}{2}\log n_k\right\} = 1. \end{aligned}$$

(2.8) – (2.10)-დან მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} & \sup_{\Delta}\left\{\left(\sum_{j=1}^m |f_k(t_j) - f_k(t_{j-1})|^{p(n)}\right)^{1/p(n)} : \rho(\Delta) \geq 2\pi/2^n\right\} \leq \\ & C\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right) \leq \frac{C}{\log p\left(\left[\frac{1}{2}\log n_k\right]\right)} \leq \\ (2.11) \quad & \frac{C}{k^2} \leq \frac{C}{r^2} \rightarrow 0, \text{ როცა } r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(2.6), (2.7) და (2.11)-ის გამოყენებით მივიღებთ  $f_0 \in AC\left(p(n) \uparrow \infty, \frac{2^n}{2\pi}\right)$ .

□

## თავი III. თანაბარი კრებადობის სალემის ნიშანი დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალებისათვის

### 3.1 შესავალი

ცნობილია, რომ [19] (ტომი I, თავი 8), [4] (თავი IV, პუნქტი 4) ან [14] (თავი I, პუნქტი 2) უწყვეტი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი შეიძლება განშლადი იყოს. მაშასადამე, საჭიროა დამატებითი პირობები იმისთვის, რომ ფურიეს მწკრივი იყოს თანაბრად კრებადი, მაგალითად, სალემის ტესტი [12] ([16], [3]).

ვთქვათ,  $f$  ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა და  $l$  დადებითი რიცხვია. ტაბერსკიმ [13] განიხილა შემდეგი ჯამები:

$$S_n^l(x, f) = \frac{a_0^l}{2} + \sum_{k=1}^n \left( a_k^l \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k^l \sin \frac{k\pi t}{l} \right),$$

სადაც

$$(3.1) \quad a_n^l = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt, \quad b_n^l = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt,$$

$x \in (-\infty; \infty)$  და  $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . უკანასკნელი ჯამები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ დირიხლეს ინტეგრალებით შემდეგნაირად:

$$S_n^l(x, f) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) D_n^l(u - x) du,$$

სადაც

$$D_n^l(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi t}{l} = \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}}.$$

თუ  $f$  ლოკალურად ინტეგრებადი პერიოდული ფუნქციაა, პერიოდით  $2\pi$ , მაშინ  $l = \pi$ -თვის უკანასკნელი საშუალოები ემთხვევა ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამებს ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ.

ნაშრომის მთავარი ამოცანაა სალემის [12] ტესტისა და მისი შედეგების დამტკიცება განზოგადებული დირიხლეს ინტეგრალებისთვის.

სალემის ტესტი [12] შეიძლება ჩამოვყალიბოთ შემდეგი სახით:

ვთქვათ,  $f$  არის  $2\pi$  პერიოდული, უწყვეტი ფუნქცია და  $n$  კენტი რიცხვია. ვთქვათ,

$$T_n(x, t) = \frac{f(x + t/n) - f(x + (t + \pi)/n)}{1} + \frac{f(x + (t + 2\pi)/n) - f(x + (t + 3\pi)/n)}{3} + \dots$$

$$+ \frac{f(x + (t + (n-1)\pi)/n) - f(x + (t + n\pi)/n)}{n}$$

და ვთქვათ,  $Q_n(x, t)$  მიიღება  $T_n(x, t)$  გამოსახულებაში  $t$  და  $\pi$ -ის ნაცვლად, შესაბამისად  $-t$  და  $-\pi$ -ის ჩასმით.

თუ  $Q_n(x, t)$  და  $T_n(x, t)$  თანაბრად კრებადია 0-კენ, მაშინ  $f$  ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია  $f$ -კენ.

### 3.2 დამხმარე ლემები

**ლემა 3.1.** ვთქვათ,  $f$  არის ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty, -H]$ ,  $[H, \infty)$  ( $H \geq 0$ ) ინტერვალზე. მაშინ

$$(3.2) \quad \frac{1}{l} \int_l^{l+\frac{l}{n}} |f(t)| dt \rightarrow 0, \quad \frac{1}{l} \int_{-l-\frac{l}{n}}^{-l} |f(t)| dt \rightarrow 0, \quad \text{როცა} \quad \frac{n}{l} \rightarrow 0 (l \geq 1).$$

თუ  $c \geq 0$  ფიქსირებული რიცხვია, მაშინ არსებობს ისეთი  $M > 0$  რიცხვი, რომ

$$(3.3) \quad \frac{1}{T} \int_T^{T+c} |f(t)| dt \leq M; \quad \frac{1}{T} \int_{-T-c}^{-T} |f(t)| dt \leq M$$

ყოველი  $T \geq \delta$ -თვის ( $\delta$  ფიქსირებული დადებითი რიცხვია).

**დამტკიცება:** 1) ჯერ ვაჩვენოთ (3.2)-ის პირველი ნაწილი. მეორის სამართლიანობა შეგვიძლია შევამოწმოთ იგივე გზით. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:  $l < H$  და  $l \geq H$ .

$f$ -ის ლოკალურად ინტეგრებადობიდან,  $l < H$ -თვის, მივიღებთ

$$\frac{1}{l} \int_l^{l+\frac{l}{n}} |f(t)| dt \leq \int_l^{l+\frac{l}{n}} |f(t)| dt \rightarrow 0, \text{ როცა } \frac{l}{n} \rightarrow 0.$$

თუ  $l \geq H$ , მაშინ

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_l^{l+\frac{l}{n}} |f(t)| dt &\leq \frac{1}{l} \int_l^{l+\frac{l}{n}} |f(t) - f(H)| dt + \frac{1}{l} \int_l^{l+\frac{l}{n}} |f(H)| dt \leq \\ &\omega\left(f; \frac{l}{n} + \frac{l}{n^2} - \frac{H}{n}\right) + \frac{|f(H)|}{n} \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2) ახლა ვაჩვენოთ (3.3)-ის პირველი ნაწილის სამართლიანობა, მეორე მტკიცდება პირველის ანალოგიურად. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:  $\delta \leq T \leq H + 1$  და  $T > H + 1$ .

თუ  $\delta \leq T \leq H + 1$  მაშინ

$$(3.4) \quad \frac{1}{T} \int_T^{T+c} |f(t)| dt \leq \frac{1}{\delta} \int_0^{H+c+1} |f(t)| dt =: M_1.$$

თუ  $T > H + 1$ , მაშინ

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_T^{T+c} |f(t)| dt &\leq \frac{1}{T} \int_T^{T+c} |f(t) - f(H)| dt + \frac{1}{T} \int_T^{T+c} |f(H)| dt \leq \\ &\frac{c}{T} \omega\left(f; T + c - H\right) + \frac{cf(H)}{T} \leq 2c\omega\left(f; 1 + \frac{c}{T} - \frac{H}{T}\right) + cf(H) \leq \\ (3.5) \quad &2c\omega(f; 1 + |c - H|) + cf(H) =: M_2. \end{aligned}$$

(3.4) და (3.5) შეფასებებიდან გამომდინარეობს (3.3), სადაც  $M = \max\{M_1, M_2\}$ .

□

**ლემა 3.2.** ვთქვათ,  $f$  არის ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty, -H], [H, \infty)$  ( $H \geq 0$ ) ინტერვალებზე. თუ  $f$  შემოსაზღვრულია  $[a, b]$  ( $-\infty < a \leq b < \infty$ )-ზე, მაშინ

$$(3.6) \quad \frac{1}{l} \int_l^{l+\frac{l}{n}} |\phi_x(t)| dt \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty (l \geq 1)$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ.

ამასთან, რაიმე  $c \geq 0$  ფიქსირებული რიცხვისთვის, არსებობს ისეთი  $M > 0$  რიცხვი, რომ

$$(3.7) \quad \frac{1}{T} \int_T^{T+c} |\phi_x(t)| dt \leq M$$

ყოველი  $T \geq \delta$ -სა და  $x \in [a, b]$ -თვის, სადაც  $\delta$  არის ფიქსირებული დადებითი რიცხვი.

**დამტკიცება:** ვთქვათ,  $c_1 = \max\{|a|, |b|, 1\}$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ  $x \pm t \in (-\infty, -H] \cup [H, \infty)$  ყოველი  $x \in [a, b]$ -ის და  $t \in [l - \frac{l}{n}; l + \frac{l}{n}]$ -თვის, სადაც  $l > H + c_1$ .

ვაჩვენოთ (3.6).

1) დავუშვათ, რომ  $l \leq H + c_1$ . რადგან  $f$  არის ლოკალურად ინტეგრებადი და შემოსაზღვრულია  $[a, b]$  ( $-\infty < a \leq b < \infty$ )-ზე, სამართლიანია შეფასება

$$\frac{1}{l} \int_l^{l+\frac{l}{n}} |\phi_x(t)| dt \leq \int_{x+l}^{x+l+\frac{l}{n}} |f(u)| du + \int_{x-l}^{x-l+\frac{l}{n}} |f(u)| du + \frac{2l}{n} \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty.$$

თუ  $l > H + c_1$ , მაშინ

$$\frac{1}{l} \int_l^{l+\frac{l}{n}} |\phi_x(t)| dt \leq$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{l} \int_l^{l+\frac{l}{n}} |f(x+t) - f(H)| dt + \frac{1}{l} \int_l^{l+\frac{l}{n}} |f(x-t) - f(-H)| dt + \\
& \frac{1}{l} \int_l^{l+\frac{l}{n}} 2|f(x)| dt + \frac{1}{l} \int_l^{l+\frac{l}{n}} |f(H) + f(-H)| dt \leq \\
& 2\omega\left(f; \frac{l}{n} + \frac{l}{n^2} + \frac{c_1 + H}{n}\right) + \frac{2}{n} \sup_{x \in [a; b]} |f(x)| + \frac{1}{n} |f(H) + f(-H)| \rightarrow 0 \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ.

ახლა ვაჩვენოთ (3.7).

2) თუ  $\delta \leq T \leq H + c_1$ , მაშინ

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T} \int_T^{T+c} |\phi_x(t)| dt \leq \\
& \frac{1}{T} \int_{x+T}^{x+T+c} |f(u)| du + \frac{1}{T} \int_{x-T}^{x-(T+c)} |f(u)| du + \frac{2c|f(x)|}{T} \leq \\
& \frac{2}{\delta} \int_{-T-c-c_1}^{T+c+c_1} |f(u)| du + \frac{2c}{\delta} \sup_{x \in [a; b]} |f(x)| \leq \\
(3.8) \quad & \frac{2}{\delta} \int_{-H-c-2c_1}^{H+c+2c_1} |f(u)| du + \frac{2c}{\delta} \sup_{x \in [a; b]} |f(x)| := M_1.
\end{aligned}$$

ცხადია,  $M_1 < \infty$  და არ არის დამოკიდებული  $x$ -ზე.

ვთქვათ,  $T > H + c_1$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ  $x \pm t \in (-\infty; -H] \cup [H; \infty)$  ყოველი  $x \in [a, b]$  და  $t \in (-\infty; -T] \cup [T; \infty)$ -თვის. აქედან,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T} \int_T^{T+c} |\phi_x(t)| dt \leq \\
& \frac{1}{T} \int_T^{T+c} |f(x+t) - f(H)| dt + \frac{1}{T} \int_T^{T+c} |f(x-t) - f(-H)| dt + \\
& \frac{1}{T} \int_T^{T+c} 2|f(x)| dt + \int_T^{T+c} |f(H) + f(-H)| dt \leq \\
& \frac{2c}{T} \omega(f; T + c_1 + c - H) + \frac{2c}{T} |f(x)| + \frac{c}{T} (|f(-H) + f(H)|) \leq
\end{aligned}$$

$$(3.9) \quad 4c\omega(f; 1 + c_1 + |c - H|) + 2c \sup_{x \in [a; b]} |f(x)| + c(|f(-H) + f(H)|) =: M_2.$$

რადგან  $f$  შემოსაზღვრულია  $[a; b]$ -ზე, ამიტომ  $M_2 < \infty$  და არ არის დამოკიდებული  $x$ -ზე.

(3.8) და (3.9)-დან მივიღებთ (3.7)-ს, სადაც  $M = \max\{M_1, M_2\}$ .

□

**შენიშვნა 3.3.** ლემა 3.2 -ის მტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ ის სამართლიანი იქნება იმ შემთხვევაშიც, თუ  $\phi_x(t)$  ფუნქციის ნაცვლად ჩვენ განვიხილავთ  $f_x^+(t) = f(x+t) - f(x)$  ან  $f_x^-(t) = f(x-t) - f(x)$  ფუნქციას.

**ლემა 3.4.** ვთქვათ,  $f$  არის ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty, -H]$ ,  $[H, \infty)$  ( $H \geq 0$ ) ინტერვალებზე და  $c \geq 0$ . მაშინ

$$\frac{1}{l} \int_{\theta_l}^{\theta_l + \frac{l}{n}} |f(t)| dt \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty (l \geq 1),$$

სადაც  $\theta_l$  არის რაიმე რიცხვი  $[-l - c; l + c]$ -დან.

**დამტკიცება:** რადგან  $f$  ლოკალურად ინტეგრებადია და  $l \geq 1$ , ამიტომ  $\theta_l \in [-H - 1; H]$ -თვის გვაქვს

$$\frac{1}{l} \int_{\theta_l}^{\theta_l + \frac{l}{n}} |f(t)| dt \leq \int_{\theta_l}^{\theta_l + \frac{l}{n}} |f(t)| dt \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty.$$

თუ  $\theta_l \in [H; \infty)$ , მაშინ

$$\frac{1}{l} \int_{\theta_l}^{\theta_l + \frac{l}{n}} |f(t)| dt \leq \frac{1}{l} \int_{\theta_l}^{\theta_l + \frac{l}{n}} |f(t) - f(H)| dt + \frac{1}{l} \int_{\theta_l}^{\theta_l + \frac{l}{n}} |f(H)| dt \leq$$

$$\frac{1}{l} \omega\left(f; \theta_l + \frac{l}{n} - H\right) \frac{l}{n} + \frac{|f(H)|}{l} \cdot \frac{l}{n} \leq \omega\left(f; \frac{\theta_l}{n} + \frac{l}{n^2}\right) + \frac{|f(H)|}{n} \leq$$

$$\omega\left(f; \frac{l+c}{n} + \frac{l}{n^2}\right) + \frac{|f(H)|}{n} \rightarrow 0 \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty.$$

□

**ლემა 3.5.** ვთქვათ,  $f$  არის ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty, -H], [H, \infty)$  ( $H \geq 0$ ) ინტერვალზე და შემოსაზღვრულია  $[a, b]$  ( $-\infty < a \leq b < \infty$ ) ინტერვალზე, მაშინ

$$\frac{1}{l} \int_{\theta_l}^{\theta_l + \frac{l}{n}} |\phi_x(t)| dt \rightarrow 0 \quad \text{როცა} \quad n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty \quad (l \geq 1)$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ, სადაც  $\theta_l$  ნებისმიერად არჩეული რიცხვია  $[-l; l]$ -დან.

**დამტკიცება:** ვთქვათ,  $c = \max\{|a| + 1, |b| + 1\}$ . ცხადია,  $x + \theta_l + \frac{l}{n}, x - (\theta_l + \frac{l}{n}) \in [-l - c; l + c]$ . მაშინ **ლემა 3.4**-დან გვაქვს:

$$\frac{1}{l} \int_{\theta_l}^{\theta_l + \frac{l}{n}} |\phi_x(t)| dt \leq \frac{1}{l} \int_{x+\theta_l}^{x+\theta_l + \frac{l}{n}} |f(u)| du + \frac{1}{l} \int_{x-(\theta_l + \frac{l}{n})}^{x-\theta_l} |f(u)| du + \frac{2}{n} \sup_{x \in [a; b]} |f(x)| \rightarrow 0$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ, როცა  $n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$ .

□

**ლემა 3.6.** ვთქვათ,  $f$  არის ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty, -H], [H, \infty)$  ( $H \geq 0$ ) ინტერვალზე და  $f$  შემოსაზღვრულია  $[a, b]$  ( $-\infty < a \leq b < \infty$ )-ის მიმართ. ვთქვათ,  $s(u)$  არის  $f(u)$  ან  $\phi_x(u) = f(x + u) + f(x - u) - 2f(x)$  და  $r(u)$  არის  $\sin u$  ან  $\cos u$ . მაშინ

$$(3.10) \quad \frac{1}{l} \int_{\theta_l}^l s(t) r\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt \rightarrow 0, \quad \frac{1}{l} \int_{-l}^{-\theta_l} s(t) r\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt \rightarrow 0 \quad \text{როცა} \quad n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty \quad (l \geq 1),$$

სადაც  $\theta_l$  ნებისმიერადაა არჩეული  $[0; l]$ -დან. იმ შემთხვევაში, როცა  $s(u) = \phi_x(u)$  ჩვენ გვაქვს თანაბარი კრებადობა  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ.

**დამტკიცება:** დავამტკიცოთ მხოლოდ (3.10)-ის პირველი ნაწილი, მეორე დამტკიცდება იმავე მეთოდით.

$1^0$  თავიდან ვიგულისხმობთ, რომ  $f$  თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty, \infty)$  ინტერვალზე. ვთქვათ,  $p$  არის ისეთი კენტი რიცხვი, რომ  $p = \min \left\{ i : i \in N, \left( i - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{n} \geq \theta_l \right\}$  და  $q$  არის ისეთი კენტი რიცხვი, რომ  $q = \max \left\{ i : i \in N, i - \frac{1}{2} \leq n \right\}$ .  $\Sigma$  აღნიშნავს, რომ ინდექსი  $k$  იღებს მხოლოდ კენტ მნიშვნელობებს. ადვილი საჩვენებელია, რომ



$$(3.11) \quad p \frac{l}{n} - \theta_l \leq \frac{5l}{2n} < 1, \quad l - q \frac{l}{n} < \frac{2l}{n} < 1, \quad q - p < n + \frac{1}{2}.$$

მაშინ

$$(3.12) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{l} \int_{\theta_l}^l s(t) r\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt = \\ & \frac{1}{l} \int_{\theta_l}^{p \frac{l}{n}} s(t) r\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt + \frac{1}{l} \int_{p \frac{l}{n}}^{q \frac{l}{n}} s(t) r\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt + \frac{1}{l} \int_{q \frac{l}{n}}^l s(t) r\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt =: \\ & I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

(3.11)-ის პირველი და მეორე უტოლობებიდან და ლემა 3.4 და 3.5-დან მივიღებთ

$$(3.13) \quad |I_1| \leq \frac{2}{2l} \int_{\theta_l}^{\theta_l + \frac{5l}{2n}} |s(t)| dt \rightarrow 0, \quad |I_3| \leq \frac{2}{2l} \int_{l - \frac{2l}{n}}^l |s(t)| dt \rightarrow 0 \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty.$$

$s(t) = \phi_x(t)$ -ს შემთხვევაში გვაქვს თანაბარი კრებადობა  $x \in [a, b]$ -ზე.

ცხადია, რომ

$$I_2 = \sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{l} \int_{k \frac{l}{n}}^{(k+1) \frac{l}{n}} s(t) r\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt.$$

ორივე  $r(u) = \sin u$  და  $r(u) = \cos u$  შემთხვევაში სამართლიანია ტოლობა:  
 $r(u + (k-1)\pi) = (-1)^{k-1} r(u)$  და  $\omega(s; \delta) \leq \max\{\omega(\phi_x; \delta), \omega(f; \delta)\} \leq 2\omega(f; \delta)$   
 მარტივი გარდაქმნებით და (3.11)-ის ძალით მივიღებთ

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{n}}^{\frac{2l}{n}} s\left(u + (k-1) \frac{l}{n}\right) r\left(\frac{n\pi u}{l} + (k-1)\pi\right) du = \\ & \sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{n}}^{\frac{2l}{n}} (-1)^{k-1} s\left(u + (k-1) \frac{l}{n}\right) r\left(\frac{n\pi u}{l}\right) du = \\ & \sum_{k=p}^{q-2} \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{n}}^{\frac{2l}{n}} \left[ s\left(u + (k-1) \frac{l}{n}\right) - s\left(u + k \frac{l}{n}\right) \right] r\left(\frac{n\pi u}{l}\right) du \leq \end{aligned}$$

$$\sum_{k=p}^{q-2} \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{n}}^{\frac{2l}{n}} 2\omega\left(f; \frac{l}{n}\right) du \leq$$

$$\frac{q-p}{n} 2\omega\left(f; \frac{l}{n}\right) \leq \frac{n+\frac{1}{2}}{n} 2\left(f; \frac{l}{n}\right) \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$$

(როდესაც  $s(t) = \phi_x(t)$  გვაქვს თანაბარი კრებადობა  $x \in [a, b]$ -ზე).

ამრიგად, (3.12) და (3.13)-დან გამომდინარეობს (3.10).

2<sup>0</sup> ზოგად შემთხვევაში, არსებობს  $(-\infty, \infty)$  ინტერვალზე თანაბრად უწყვეტი ისეთი  $g$  ფუნქცია, რომ  $g(t) = f(t)$ , როცა  $|t| \geq H$  და  $\int_{-H}^H |f(t) - g(t)| dt < \frac{\varepsilon}{3}$ . ვთქვათ,  $s^*(t) = g(t)$  და  $s^*(t) = g(x+t) + g(x-t) - 2g(x)$  შესაბამისად, როცა  $s(t) = f(t)$  ან  $s(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t) - s^*(t)| dt \leq 3 \int_{-H}^H |f(t) - g(t)| dt < \varepsilon$$

და

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{l} \int_{\theta_l}^l s(t) r\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt \right| \leq \\ & \left| \frac{1}{l} \int_{\theta_l}^l s^*(t) r\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt \right| + \frac{1}{l} \int_{\theta_l}^l |s(t) - s^*(t)| r\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt \leq \\ & \left| \frac{1}{l} \int_{\theta_l}^l s^*(t) r\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt \right| + \varepsilon. \end{aligned}$$

1<sup>0</sup>-ის ძალით ლემა დამტკიცებულია.

□

**შედეგი 3.7.** ვთქვათ,  $f$  არის ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty, -H]$ ,  $[H, \infty)$  ( $H \geq 0$ ) ინტერვალზე. მაშინ

$$a_n^l \rightarrow 0, \quad b_n^l \rightarrow 0, \quad \text{როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty \quad (l \geq 1),$$

სადაც  $a_n^l$  და  $b_n^l$  ფურიეს კოეფიციენტებია, რომელიც განსაზღვრულია (3.1) ფორმულით.

**დამტკიცება:** ეს არის ლემა 3.6-ის კერძო შემთხვევა, როცა  $\theta_l = 0$  და  $s(t) = f(t)$ .

□

**შედეგი 3.8.** ვთქვათ,  $f$  არის ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty, -H], [H, \infty)$  ( $H \geq 0$ ) ინტერვალებზე. თუ  $f$  შემოსაზღვრულია  $[a, b]$  ( $-\infty < a \leq b < \infty$ )-ზე, მაშინ

$$I := \frac{1}{l} \int_0^l \phi_x(t) \sin \frac{n\pi t}{l} \left[ \frac{1}{2 \tan \frac{\pi t}{2l}} - \frac{l}{\pi t} \right] dt \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty \ (l \geq 1)$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ.

**დამტკიცება:** შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\psi(t) = \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t},$$

მაშინ

$$I = \frac{1}{l} \int_0^l \phi_x(t) \sin \frac{n\pi t}{l} \psi\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt.$$

რადგან  $\psi\left(\frac{\pi t}{l}\right)$  არაკლებადია  $[0, l]$ -ზე,  $\lim_{t \rightarrow 0} \psi\left(\frac{\pi t}{l}\right) = 0$  და  $\lim_{t \rightarrow l} \psi\left(\frac{\pi t}{l}\right) = -\frac{1}{\pi}$ ,

ამიტომ საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის ძალით მივიღებთ

$$I = -\frac{1}{\pi l} \int_{\theta_l}^l \phi_x(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt,$$

სადაც  $\theta_l \in [0; l]$ . ლემა 3.6-დან,  $I \rightarrow 0$ , როცა  $n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$  თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ.

□

**ლემა 3.9.** თუ  $f(x)$  ლოკალურად ინტეგრებადია და შემოსაზღვრულია  $[a, b]$ -ზე, მაშინ

$$\int_{\delta}^{\Delta} \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$  ( $-\infty < a \leq b < \infty$ )-ის მიმართ, სადაც  $\delta$  და  $\Delta$  არის ფიქსირებული დადებითი რიცხვები.

**დამტკიცება:** დამტკიცება შეიძლება იგივე მეთოდით, როგორც **ლემა 6.4** (იხ. [19], თავი II).

□

### 3.3 ძირითადი შედეგები

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\phi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

**თეორემა 3.10.**  $f$  არის ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty, -H]$ ,  $[H, \infty)$  ( $H \geq 0$ ) ინტერვალზე. თუ  $f$  შემოსაზღვრულია  $[a, b]$  ( $-\infty < a \leq b < \infty$ ) ინტერვალზე, მაშინ

$$S_n^l(x, f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^l \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt + o(1) \text{ როცა } l, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ.

**დამტკიცება:** მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$$D_n^{*l}(t) := \frac{D_{n-1}^l(t) + D_n^l(t)}{2} = \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{2 \tan \frac{\pi t}{2l}}$$

$$(3.14) \quad D_n^l(t) - D_n^{*l}(t) = \frac{1}{2} \cos \frac{n\pi t}{l}.$$

აქედან,

$$S_n^l(x, f) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) D_n^l(u-x) du =$$

$$(3.15) \quad \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) D_n^{*l}(u-x) du + \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{n\pi(u-x)}{l} du.$$

შევაფასოთ (3.15)-ის მეორე ნაწილი. **შედეგი 3.7**-ის ძალით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{n\pi(u-x)}{l} du \right| \leq \\
& \left| \frac{\cos \frac{n\pi x}{l}}{2l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{n\pi u}{l} du \right| + \left| \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{2l} \int_{-l}^l f(u) \sin \frac{n\pi u}{l} du \right| \leq \\
(3.16) \quad & \frac{1}{2} |a_n^l| + \frac{1}{2} |b_n^l| \rightarrow 0, \text{ როცა } l, \frac{n}{l} \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

(3.15) და (3.16)-დან გამომდინარეობს

$$S_n^l(x, f) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) D_n^{*l}(u-x) du + o(1).$$

გამოვიყენოთ ორი მარტოვი იგივეობა.

$$\begin{aligned}
S_n^l(x, f) = \\
\frac{1}{2l} \left\{ \int_{-l+x}^{l+x} f(x-t) D_n^{*l}(t) dt + \int_{-l-x}^{l-x} f(x+t) D_n^{*l}(t) dt \right\} + o(1)
\end{aligned}$$

და

$$\frac{1}{2l} \left\{ \int_{-l+x}^{l+x} D_n^{*l}(t) dt + \int_{-l-x}^{l-x} D_n^{*l}(t) dt \right\} = 1,$$

საიდანაც (იხ. [13])

$$\begin{aligned}
S_n^l(x, f) - f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l+x}^{l-x} \{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)\} D_n^{*l}(t) dt + \\
\frac{1}{2l} \int_{l-x}^{l+x} \{f(x-t) - f(x)\} D_n^{*l}(t) dt &+ \frac{1}{2l} \int_{-l-x}^{-l+x} \{f(x+t) - f(x)\} D_n^{*l}(t) dt + o(1) =: \\
I_n^l(x) + U_n^l(x) + V_n^l(x) &+ o(1).
\end{aligned}$$

რადგან  $I_n^l(x)$ -ში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ლუწია, ამიტომ

$$\begin{aligned}
I_n^l(x) &= \frac{1}{l} \int_0^{l-x} \phi_x(t) D_n^{*l}(t) dt = \\
\frac{1}{l} \int_0^l \phi_x(t) D_n^{*l}(t) dt - \frac{1}{l} \int_{l-x}^l \phi_x(t) D_n^{*l}(t) dt &:= J_n^l(x) + W_n^l(x).
\end{aligned}$$

ამრიგად,

$$S_n^l(x, f) - f(x) = J_n^l(x) + U_n^l(x) + V_n^l(x) + W_n^l(x) + o(1).$$

ვთქვათ,  $|f(x)| \leq K$ , როცა  $x \in [a, b]$  ( $a, b, K$  კონსტანტებია) და  $c = \max\{|a|, |b|\}$ , მაშინ

$$|U_n^l(x)| \leq \frac{1}{4l \tan \frac{\pi(l-b)}{2l}} \left\{ \int_{-l}^{2x-l} |f(t)| dt + 2cK \right\}.$$

**ლემა 3.1-**დან არსებობს ისეთი  $M > 0$  რიცხვი, რომ

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^{2x-l} |f(t)| dt \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^{-l+2c} |f(t)| dt \leq M,$$

ამასთან,  $\frac{\pi(l-b)}{2l} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , როცა  $l \rightarrow \infty$ , საიდანაც  $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\tan \frac{\pi(l-b)}{2l}} \rightarrow 0$ . აქედან მივიღებთ,

რომ

$$\lim_{l \rightarrow \infty} U_n^l(x) = 0,$$

ანალოგიურად,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} V_n^l(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} W_n^l(x) = 0.$$

საბოლოოდ,

$$(3.17) \quad S_n^l(x, f) - f(x) = J_n^l(x) + o(1), \text{ როცა } l, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ.

(3.17)-დან

$$\begin{aligned} S_n^l(x, f) - f(x) &= \frac{1}{l} \int_0^l \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{2 \tan \frac{\pi t}{2l}} dt + o(1) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^l \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt + \frac{1}{l} \int_0^l \phi_x(t) \sin \frac{n\pi t}{l} \left[ \frac{1}{2 \tan \frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{\frac{\pi t}{l}} \right] dt + o(1) =: \\ &= A_1 + A_2 + o(1). \end{aligned}$$

ლემა 3.8-დან

$$A_2 \rightarrow 0 \text{ როცა } l, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ. თეორემა 3.10 დამტკიცებულია.

□

ვთქვათ,  $f$  არის ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty, -H], [H, \infty)$  ( $H \geq 0$ ) ინტერვალებზე. შემდეგი ფორმულით განვსაზღვროთ  $f$  ფუნქციის უწყვეტობის მოდული:

$$\omega(f; \delta) = \omega^H(f; \delta) := \max\{a; b\},$$

სადაც

$$a = \sup_{x, y \in (-\infty; -H]} \{f(x) - f(y) : |x - y| \leq \delta\};$$

და

$$b = \sup_{x, y \in [H; \infty)} \{f(x) - f(y) : |x - y| \leq \delta\}.$$

ყოველი არაუარყოფითი  $\Delta$  რიცხვისთვის განვსაზღვროთ.

$$(3.18) \quad T_{n, l, \Delta}^{\pm}(u) := \sum_{k=m}^q \frac{f\left(u \pm (k-1)\frac{l}{n}\right) - f\left(u \pm k\frac{l}{n}\right)}{k},$$

სადაც  $m$  არის ისეთი კენტი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც  $m = \min\{i : i \in N, (i - \frac{1}{2})\frac{l}{n} \geq \Delta\}$  და  $q$  არის ისეთი კენტი რიცხვი, რომლისთვისაც  $q = \max\{i : i \in N, i - \frac{1}{2} \leq n\}$ .  $\Sigma'$  აღნიშნავს, რომ  $k$  იღებს მხოლოდ კენტ მნიშვნელობებს. ცხადია,

$$(3.19) \quad T_{n, l, 0}^{\pm}(u) := \sum_{k=1}^q \frac{f\left(u \pm (k-1)\frac{l}{n}\right) - f\left(u \pm k\frac{l}{n}\right)}{k}.$$

**თეორემა 3.11.** ვთქვათ,  $f$  არის ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც შემოსაზღვრულია  $[a, b]$  ( $-\infty < a \leq b < \infty$ )-ზე და თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty, -H]$ ,  $[H, \infty)$  ( $H \geq 0$ ) ინტერვალზე.

თუ  $T_{n,l,\Delta}^\pm(x)$  თანაბრად კრებადია 0-კენ  $[a, b]$ -ს მომცველ რაიმე ღია ინტერვალზე, როცა  $n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$ , მაშინ

$$\int_\delta^l \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty (l \geq 1)$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$  ( $-\infty < a \leq b < \infty$ )-ზე, სადაც  $\Delta = \delta = 0$ , როცა  $H = 0$ , და  $\delta > 0$  არის ნებისმიერი ფიქსირებული რიცხვი, ყოველი ფიქსირებული  $\Delta \geq H + \max\{|a|, |b|\}$ -თვის, როცა  $H > 0$ .

**დამტკიცება:** ცხადია,

$$\int_\delta^l \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt = \left( \int_\delta^\Delta + \int_\Delta^l \right) \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt =: W + I.$$

**ლემა 3.9-**დან გამომდინარეობს, რომ

$$W \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ. როდესაც  $H > 0$  და  $W = 0$ , როდესაც  $H = 0$ .

$t \geq \Delta \geq 0$ -თვის

$$(3.20) \quad x + t \in [H, \infty); \quad x - t \in (-\infty, -H]$$

ყოველი  $x \in [a, b]$ -თვის. ეს ნიშნავს, რომ  $f_x^\pm := f(x \pm t)$  თანაბრად უწყვეტი ფუნქციებია  $[\Delta; \infty)$  ინტერვალზე და

$$(3.21) \quad \omega(f_x^\pm) \leq \omega(f).$$



ვთქვათ,  $m$  არის ისეთი კენტი რიცხვი,  $m = \min \left\{ i: i \in N, \left( i - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{n} \geq \Delta \right\}$  და  $q$  არის ისეთი კენტი რიცხვი, რომ  $q = \max \left\{ i: i \in N, i - \frac{1}{2} \leq n \right\}$  მაშინ

$$I = \int_{\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{n}}^{\left(q-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{n}} \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt + \int_{\Delta}^{\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{n}} \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt +$$

$$\int_{\left(q-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{n}}^l \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt =: I_1 + I_2 + I_3.$$

თუ  $H > 0$ , მაშინ  $\Delta$  არის ფიქსირებული დადებითი რიცხვი და რადგან  $\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n} - \Delta \leq \frac{2l}{n}$ ,  $f$  ინტეგრებადია  $[-(\Delta + c), \Delta + c]$ -ზე და  $f$  შემოსაზღვრულია  $[a, b]$  ( $-\infty < a \leq b < \infty$ )-ის მიმართ, ამიტომ გვექნება

$$|I_2| \leq \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta}^{\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{n}} |\phi_x(t)| dt \leq$$

$$\frac{1}{\Delta} \int_{x+\Delta}^{x+\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{n}} |f(u)| du + \frac{1}{\Delta} \int_{x-\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{n}}^{x-\Delta} |f(u)| du + \frac{4|f(x)|l}{n\Delta} \rightarrow 0, \quad \text{როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ.

თუ  $H = 0$ , მაშინ  $f$  თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty; \infty)$  ინტერვალზე, ვიგულისხმით, რომ  $m = 1$  და  $\Delta = 0$ . ამ შემთხვევაში

$$I_2 = \int_0^{\frac{l}{2n}} \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt \leq \pi \omega \left( f; \frac{l}{n} \right) \rightarrow 0, \quad n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty.$$

ლემა 3.2-დან მივიღებთ

$$|I_3| \leq \frac{1}{l - \frac{l}{n}} \int_{l-\frac{l}{n}}^l |\phi_x(t)| dt \rightarrow 0, \quad n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ.

ცხადია,

$$I_1 = \int_{\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{n}}^{\left(q-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{n}} \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt =$$

$$\int_{(m-\frac{1}{2})\frac{l}{n}}^{(q-\frac{1}{2})\frac{l}{n}} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt + \int_{(m-\frac{1}{2})\frac{l}{n}}^{(q-\frac{1}{2})\frac{l}{n}} [f(x-t) - f(x)] \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt.$$

შევაფასოთ

$$I_1^\pm := \int_{(m-\frac{1}{2})\frac{l}{n}}^{(q-\frac{1}{2})\frac{l}{n}} [f(x \pm t) - f(x)] \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt.$$

ამისთვის შემოვიღოთ  $s_k$  და  $t_k$  შემდეგი ფორმულებით:

$$(3.22) \quad s_k := k \frac{l}{n}, k = m, m+1, \dots, q-1;$$

$$(3.23) \quad t_k := \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n}, k = m, m+1, \dots, q.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ  $s_k$  და  $t_k$  წერტილები ეკუთვნის  $\left[\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n}, \left(q - \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n}\right]$  ინტერვალს.

ვთქვათ,  $\lambda^{n,l}(t): \left[\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n}, \left(q - \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n}\right] \rightarrow \left[\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n}, \left(q - \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n}\right]$ , სადაც

$$(3.24) \quad \lambda^{n,l}(t) = \begin{cases} t_{k+1} - (t - t_k), & \text{თუ } t \in (t_k, s_k), \quad k \text{ კენტია} \\ t, & \text{თუ } t \in (s_k, t_{k+1}), \quad k \text{ კენტია} \\ t_{k+1} - (t - t_{k+1}), & \text{თუ } t \in (t_{k+1}, s_{k+1}), \quad k \text{ კენტია} \\ t_{k+1} - (t_{k+2} - t), & \text{თუ } t \in (s_{k+1}, t_{k+2}), \quad k \text{ კენტია} \\ t, & \text{თუ } t = (t_k, s_k), \quad k \text{ კენტია} \end{cases}$$

თუ  $t \in \left[\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n}, \left(q - \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n}\right]$ , მაშინ (3.24)-დან

$$(3.25) \quad |t - \lambda^{n,l}(t)| \leq \frac{2l}{n}.$$

ცხადია,

$$I_1^\pm = \int_{(m-\frac{1}{2})\frac{l}{n}}^{(q-\frac{1}{2})\frac{l}{n}} [f(x \pm t) - f(x \pm \lambda^{n,l}(t))] \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt +$$

$$\int_{(m-\frac{1}{2})\frac{l}{n}}^{(q-\frac{1}{2})\frac{l}{n}} [f(x \pm \lambda^{n,l}(t)) - f(x)] \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt =: I_{1,1}^\pm + I_{1,2}^\pm.$$

აქედან,

$$(3.26) \quad I_{1,2}^\pm = \sum_{k=m}^{q-2} ' \int_{t_k}^{t_{k+2}} [f(x \pm \lambda^{n,l}(t)) - f(x)] \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt =: \sum_{k=m}^{q-2} ' v_k.$$

შევაფასოთ ინტეგრალი

$$v_k = \int_{t_k}^{t_{k+2}} [f(x \pm \lambda^{n,l}(t)) - f(x)] \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt =$$

$$\int_{t_k}^{s_k} + \int_{s_k}^{t_{k+1}} + \int_{t_{k+1}}^{s_{k+1}} + \int_{s_{k+1}}^{t_{k+2}} =$$

$$v_k^{(1)} + v_k^{(2)} + v_k^{(3)} + v_k^{(4)}.$$

რადგან  $s_k, t_k$  წერტილების რაოდენობა სასრულია საინტეგრაციო შუალედში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ  $f(t_k) = f(t_{k+1}) = \dots = f(s_k) = f(s_{k+1}) = \dots$ .

$v_k^{(1)}$  ინტეგრალში,  $t = u + t_k = u + (k - \frac{1}{2})\frac{l}{n}$  ცვლადის შეცვლით, მივიღებთ

$$v_k^{(1)} = \int_0^{\frac{l}{2n}} [f(x \pm \lambda^{n,l}(u + t_k)) - f(x)] \frac{\sin(\frac{n\pi u}{l} + (k - \frac{1}{2})\pi)}{u + t_k} du.$$

შევნიშნოთ, რომ  $k$  კენტი და  $u + t_k \in [t_k, s_k]$ , როდესაც  $u \in [0; \frac{l}{2n}]$ . (3.24)-დან

$\lambda^{n,l}(u + t_k) = t_{k+1} - u$ . აქედან

$$(3.27) \quad v_k^{(1)} = \int_0^{\frac{l}{2n}} [f(x \pm (t_{k+1} - u)) - f(x)] \frac{\cos \frac{n\pi u}{l}}{t_k + u} du.$$

$v_k^{(2)}$  ინტეგრალში  $t = t_{k+1} - u = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n} - u$  ცვლადის შეცვლით გვექნება

$$v_k^{(2)} = - \int_{\frac{l}{2n}}^0 \left[ f\left(x \pm \lambda^{n,l}(t_{k+1} - u)\right) - f(x) \right] \frac{\sin\left(-\frac{n\pi u}{l} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)}{t_{k+1} - u} du.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ  $k$  კენტი და  $t_{k+1} - u \in [s_k; t_{k+1}]$ , როდესაც  $u \in \left[0; \frac{l}{2n}\right]$ .

(3.24)-დან გამომდინარეობს, რომ  $\lambda^{n,l}(t_{k+1} - u) = t_{k+1} - u$ . აქედან

$$(3.28) \quad v_k^{(2)} = - \int_0^{\frac{l}{2n}} \left[ f\left(x \pm (t_{k+1} - u)\right) - f(x) \right] \frac{\cos \frac{n\pi u}{l}}{t_{k+1} - u} du.$$

$v_k^{(3)}$  ინტეგრალში  $t = u + t_{k+1} = u + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n}$  ცვლადის შეცვლით მივიღებთ

$$v_k^{(3)} = \int_0^{\frac{l}{2n}} \left[ f\left(x \pm \lambda^{n,l}(u + t_{k+1})\right) - f(x) \right] \frac{\sin\left(\frac{n\pi u}{l} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)}{u + t_{k+1}} du.$$

შევნიშნოთ, რომ  $k$  კენტი და  $t_{k+1} + u \in [t_{k+1}; s_{k+1}]$ , როცა  $u \in \left[0; \frac{l}{2n}\right]$ . (3.24)-

დან  $\lambda^{n,l}(t_{k+1} + u) = t_{k+1} + u$ . აქედან

$$(3.29) \quad v_k^{(3)} = - \int_0^{\frac{l}{2n}} \left[ f\left(x \pm (t_{k+1} + u)\right) - f(x) \right] \frac{\cos \frac{n\pi u}{l}}{t_{k+1} + u} du.$$

$t = t_{k+2} - u = \left(k + \frac{3}{2}\right) \frac{l}{n} - u$  ცვლადის შეცვლით გვექნება

$$(3.30) \quad v_k^{(4)} = - \int_{\frac{l}{2n}}^0 \left[ f\left(x \pm \lambda^{n,l}(t_{k+2} - u)\right) - f(x) \right] \frac{\sin\left(-\frac{n\pi u}{l} + \left(k + \frac{3}{2}\right)\pi\right)}{t_{k+2} - u} du.$$

ამრიგად, (3.27) – (3.30)-დან გვექნება

$$v_k = \int_0^{\frac{l}{2n}} \left[ f\left(x \pm (t_{k+1} - u)\right) - f(x) \right] \cos \frac{n\pi u}{l} \times$$

$$(3.31) \quad \left\{ \frac{1}{t_k + u} - \frac{1}{t_{k+1} - u} - \frac{1}{t_{k+1} + u} + \frac{1}{t_{k+2} - u} \right\} du.$$

რადგან  $0 \leq u \leq \frac{l}{2n} \leq 1$  და  $k \geq m \geq 1$ , ამიტომ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t_k + u} - \frac{1}{t_{k+1} - u} - \frac{1}{t_{k+1} + u} + \frac{1}{t_{k+2} - u} = \\ & \frac{t_k + t_{k+2}}{(t_k + u)(t_{k+2} - u)} - \frac{2t_{k+1}}{t_{k+1}^2 - u^2} = \\ & 2t_{k+1} \left( \frac{1}{\left(t_{k+1} - \left(\frac{l}{n} - u\right)\right)\left(t_{k+1} + \left(\frac{l}{n} - u\right)\right)} - \frac{1}{t_{k+1}^2 - u^2} \right) = \\ & 2t_{k+1} \left( \frac{1}{t_{k+1}^2 - \left(\frac{l}{n} - u\right)^2} - \frac{1}{t_{k+1}^2 - u^2} \right) = \\ & 2t_{k+1} \frac{\left(\frac{l}{n} - u\right)^2 - u^2}{\left(t_{k+1}^2 - \left(\frac{l}{n} - u\right)^2\right)(t_{k+1}^2 - u^2)} \leq \\ & \frac{2t_{k+1} \left(\frac{l}{n}\right)^2}{\left(t_{k+1}^2 - \left(\frac{l}{n}\right)^2\right)\left(t_{k+1}^2 - \left(\frac{l}{n}\right)^2\right)} = \frac{2t_{k+1} \left(\frac{l}{n}\right)^2}{\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{l}{n}\right)^2 - \left(\frac{l}{n}\right)^2\right)^2} = \\ & \frac{2t_{k+1}}{\left(\frac{l}{n}\right)^2 \left(\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right)^2} = \frac{2\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n}}{\left(\frac{l}{n}\right)^2 \left(k + \frac{3}{2}\right)^2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \\ & \frac{2}{\frac{l}{n} \left(k + \frac{3}{2}\right) \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} = \\ & \frac{2}{\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{l}{n} \left(k + \frac{3}{2}\right) \left(k - \frac{1}{2}\right)} \leq \frac{1}{t_k} \cdot \frac{2}{k^2}. \end{aligned}$$

უკანასკნელის გათვალისწიებით, (3.31)-დან მივიღებთ

$$|v_k| \leq \frac{2}{k^2} \cdot \frac{1}{t_k} \int_0^{\frac{l}{2n}} |f(x \pm (t_{k+1} - u)) - f(x)| du$$

და

$$|v_k| \leq \frac{2}{k^2} \cdot \frac{1}{t_k} \int_{s_k}^{t_{k+1}} |f(x \pm t) - f(x)| dt \leq$$

$$\frac{2}{k^2} \cdot \frac{1}{t_k} \int_{t_k}^{1+t_k} |f(x \pm t) - f(x)| dt.$$

თუ  $H > 0$ , მაშინ  $\Delta$  ფიქსირებული დადებითი რიცხვია და  $t_k \geq \Delta$  ყოველი  $k \geq m$ -თვის. შენიშვნა 3.3-ის ძალით, არსებობს ისეთ  $M > 0$  რიცხვი, რომ

$$\frac{1}{t_k} \int_{t_k}^{1+t_k} |f(x \pm t) - f(x)| dt \leq M$$

ყოველი  $t_k$  და  $x \in [a, b]$ -თვის. აქედან

$$|v_k| \leq \frac{2M}{k^2}.$$

რადგან  $m \geq \frac{n\Delta}{l} + \frac{1}{2} \rightarrow \infty$ , როცა  $\frac{n}{l} \rightarrow \infty$  და  $\sum \frac{2M}{k^2}$  კრებადია, ამიტომ (3.26)-დან გვექნება

$$|I_{1,2}^{\pm}| \leq \sum_{k=m}^{q-2} |v_k| \leq \sum_{k=m}^{q-2} \frac{2M}{k^2} \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ.

თუ  $H = 0$ , მაშინ  $f$  თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty, \infty)$  ინტერვალზე და  $m = 1, \Delta = 0$ . ყოველი  $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს ისეთი  $\delta_1 > 0$ , რომ  $|f(x \pm t) - f(x)| < \varepsilon / \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2}$ , როცა  $|t| < \delta_1$ .

ვთქვათ,  $m_1$  არის უდიდესი კენტი რიცხვი, რომლისთვისაც  $m_1 \frac{l}{n} \leq \delta_1$ , აქედან,  $m_1 \geq \frac{n\delta_1}{l} - 2 \rightarrow \infty$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ  $|v_k| \leq \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2}}$ , როცა  $k < m_1$ .

საბოლოოდ, მივიღებთ

$$|I_{1,2}^{\pm}| \leq \sum_{k=1}^{q-2} |v_k| = \sum_{k=1}^{m_1} |v_k| + \sum_{k=m_1}^{q-2} |v_k| \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=m_1}^{\infty} \frac{2M}{k^2} = \varepsilon + o(1), \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty,$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ზე.

შესაფასებელი დაგვრჩა  $I_{1,1}^{\pm}$  ინტეგრალი.

$$I_{1,1}^{\pm} =$$

$$(3.32) \quad \left( \int_{(m-\frac{1}{2})\frac{l}{n}}^{m\frac{l}{n}} + \int_{m\frac{l}{n}}^{q\frac{l}{n}} - \int_{(q-\frac{1}{2})\frac{l}{n}}^{q\frac{l}{n}} \right) [f(x \pm t) - f(x \pm \lambda^{n,l}(t))] \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt.$$

$H > 0$ -თვის, (3.20), (3.21) და (3.25) გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს რომ (3.32)-ის პირველი წევრი მოდულით არ გადააჭარბებს შემდეგ გამოსახულებას:

$$\omega\left(f; \frac{2l}{n}\right) \frac{1}{\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{n}} \frac{l}{2n} \leq \frac{\omega\left(f; \frac{2l}{n}\right)}{2\Delta} \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty.$$

თუ  $H = 0$ , მაშინ  $m = 1$ ,  $\Delta = 0$  და (3.32)-ის პირველი წევრისთვის გვაქვს

$$\left| \int_{\frac{l}{2n}}^{\frac{l}{n}} [f(x \pm t) - f(x \pm \lambda^{n,l}(t))] \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt \right| \leq$$

$$\omega\left(f; \frac{2l}{n}\right) \frac{1}{\frac{l}{2n}} \frac{l}{n} = 2\omega\left(f; \frac{2l}{n}\right) \rightarrow 0.$$

(3.20), (3.21) და (3.25) -დან გამომდინარეობს, რომ (3.32)-ის მესამე წევრი მოდულით არ გადააჭარბებს შემდეგ გამოსახულებას:

$$\omega\left(f; \frac{2l}{n}\right) \frac{1}{\left(q-\frac{1}{2}\right)\frac{l}{n}} \frac{l}{n} \leq \frac{\omega\left(f; \frac{2l}{n}\right)}{n-2} \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty.$$

შესაფასებელი დაგვრჩა (3.32)-ის შუა წევრი:

$$J^\pm := \int_{m\frac{l}{n}}^{q\frac{l}{n}} [f(x \pm t) - f(x \pm \lambda^{n,l}(t))] \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt.$$

სიმარტივისთვის გამოვიყენოთ აღნიშვნა:  $r(t) := f(x \pm t) - f(x \pm \lambda^{n,l}(t))$  და შევნიშნოთ, რომ (3.20), (3.21) და (3.25)-დან

$$(3.33) \quad |r(t)| \leq \omega\left(f; \frac{2l}{n}\right), \quad |t| \geq \Delta.$$

მაშინ

$$J^\pm = \int_{m\frac{l}{n}}^{q\frac{l}{n}} r(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt = \sum_{k=m}^{q-1} \int_{k\frac{l}{n}}^{(k+1)\frac{l}{n}} r(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt.$$

ცვლადის შეცვლით მივიღებთ

$$\begin{aligned} J^\pm &= \sum_{k=m}^{q-1} \int_{\frac{l}{n}}^{2\frac{l}{n}} r\left(u + (k-1)\frac{l}{n}\right) \frac{(-1)^{k-1} \sin\left(\frac{n\pi u}{l}\right)}{u + (k-1)\frac{l}{n}} du = \\ &= \sum_{k=m}^{q-1} \int_l^{2l} r\left(\frac{t}{n} + (k-1)\frac{l}{n}\right) \frac{(-1)^{k-1} \sin\left(\frac{\pi t}{l}\right)}{t + (k-1)l} dt = \\ &= \sum_{k=m}^{q-2} \int_l^{2l} \left\{ \frac{r\left(\frac{t + (k-1)l}{n}\right)}{t + (k-1)l} - \frac{r\left(\frac{t + kl}{n}\right)}{t + kl} \right\} \sin\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt \end{aligned}$$

(გამოსახულებაში  $\sum_{k=m}^{q-2}$  იხილეთ  $k$  იღებს მხოლოდ კენტ მნიშვნელობებს).

$$\begin{aligned} J^\pm &= \sum_{k=m}^{q-2} \int_l^{2l} \left[ r\left(\frac{t + (k-1)l}{n}\right) - r\left(\frac{t + kl}{n}\right) \right] \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{l}\right)}{t + (k-1)l} dt + \\ &= \sum_{k=m}^{q-2} \int_l^{2l} r\left(\frac{t + kl}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{l}\right) \left[ \frac{1}{t + (k-1)l} - \frac{1}{t + kl} \right] dt =: \end{aligned}$$

$$J_1^\pm + J_2^\pm.$$

(3.33)-დან



$$|J_2^\pm| \leq \sum_{k=m}^{q-2} \int_l^{2l} \left| r\left(\frac{t+kl}{n}\right) \right| \cdot \frac{l}{(t+(k-1)l)(t+kl)} dt \leq$$

$$\sum_{k=m}^{q-2} \frac{1}{k(k+1)l} \int_l^{2l} \left| r\left(\frac{t+kl}{n}\right) \right| dt \leq$$

$$\omega\left(f; \frac{2l}{n}\right) \cdot \sum \frac{1}{k(k+1)} \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty.$$

მეორე მხვრივ

$$J_1^\pm = \sum_{k=m}^{q-2} \int_l^{2l} \left[ r\left(\frac{t+(k-1)l}{n}\right) - r\left(\frac{t+kl}{n}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi t}{l}\right) \left\{ \frac{1}{t+(k-1)l} - \frac{1}{kl} \right\} dt +$$

$$(3.34) \quad \sum_{k=m}^{q-2} \int_l^{2l} \left[ r\left(\frac{t+(k-1)l}{n}\right) - r\left(\frac{t+kl}{n}\right) \right] \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{l}\right)}{kl} dt.$$

(3.33)-დან (3.34)-ის პირველი წევრი მოდულით არ გადააჭარბებს შემდეგ გამოსახულებას:

$$2\omega\left(f; \frac{2l}{n}\right) \sum_{k=m}^{q-2} \int_l^{2l} \frac{t-l}{(t+(k-1)l)kl} dt \leq$$

$$2\omega\left(f; \frac{2l}{n}\right) \sum_{k=m}^{q-2} \int_l^{2l} \frac{l}{k^2 l^2} dt \leq 2\omega\left(f; \frac{2l}{n}\right) \sum_1^\infty \frac{1}{k^2} \rightarrow 0, \text{ როცა } \frac{n}{l} \rightarrow \infty.$$

ახლა (3.34)-ის მეორე წევრი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\sum_{k=m}^{q-2} \int_l^{\frac{3}{2}l} \left[ r\left(\frac{t+(k-1)l}{n}\right) - r\left(\frac{t+kl}{n}\right) \right] \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{l}\right)}{kl} dt +$$

$$\sum_{k=m}^{q-2} \int_{\frac{3}{2}l}^{2l} \left[ r\left(\frac{t+(k-1)l}{n}\right) - r\left(\frac{t+kl}{n}\right) \right] \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{l}\right)}{kl} dt =:$$

$$J_{1,1}^\pm + J_{1,2}^\pm.$$

რადგან  $s_k, t_k$  წერტილების რაოდენობა სასრულია, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$f(t_k) = f(t_{k+1}) = \dots = f(s_k) = f(s_{k+1}) = \dots$$

და

$$f(x + t_k) = f(x + t_{k+1}) = \dots = f(x + s_k) = f(x + s_{k+1}) = \dots.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ  $t \in [l; \frac{3}{2}l]$  მაშინ

$$\frac{t + (k-1)l}{n} \in [s_k; t_{k+1}]; \quad \frac{t + kl}{n} \in [s_{k+1}; t_{k+2}].$$

ამრიგად, (3.24)-დან

$$\lambda^{n,l} \left( \frac{t + (k-1)l}{n} \right) = \frac{t + (k-1)l}{n}; \quad \lambda^{n,l} \left( \frac{t + kl}{n} \right) = \frac{t + (k-1)l}{n}$$

და  $t \in [l; \frac{3}{2}l]$ -თვის მივიღებთ

$$r \left( \frac{t + (k-1)l}{n} \right) - r \left( \frac{t + kl}{n} \right) = f \left( x \pm \frac{t + (k-1)l}{n} \right) - f \left( x \pm \frac{t + kl}{n} \right).$$

მაშასადამე,

$$J_{1,1}^{\pm} = \int_l^{\frac{3}{2}l} \sum_{k=m}^{q-2} ' \left( f \left( x \pm \frac{t + (k-1)l}{n} \right) - f \left( x \pm \frac{t + kl}{n} \right) \right) \frac{\sin \left( \frac{\pi t}{l} \right)}{kl} dt$$

და

$$|J_{1,1}^{\pm}| \leq \int_l^{\frac{3}{2}l} \left| \sum_{k=m}^{q-2} ' \left[ f \left( x \pm \frac{t + (k-1)l}{n} \right) - f \left( x \pm \frac{t + kl}{n} \right) \right] \right| \frac{1}{kl} dt =$$

$$\frac{1}{l} \int_l^{\frac{3}{2}l} \left| \sum_{k=m}^{q-2} ' \frac{\left[ f \left( x \pm \frac{t}{n} \pm \frac{(k-1)l}{n} \right) - f \left( x \pm \frac{t}{n} \pm \frac{kl}{n} \right) \right]}{k} \right| dt = \frac{1}{l} \int_l^{\frac{3}{2}l} |T_{n,l,\Delta}^{\pm} \left( x \pm \frac{t}{n} \right)| dt.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ  $\frac{t}{n} \rightarrow 0$ , როცა  $t \in [l; \frac{3}{2}l]$  და  $n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$ . თუ  $T_{n,l,\Delta}^{\pm}(x)$

თანაბრად კრებადია 0-კენ  $[a, b]$ -ს მომცველ რაიმე ინტერვალზე, მაშინ

$$J_{1,1}^{\pm} \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ზე.

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$$J_{1,2}^{\pm} = \sum_{k=m}^{q-2} ' \int_{\frac{3}{2}l}^{2l} \left\{ f\left(x \pm \frac{t + (k-1)l}{n}\right) - f\left(x \pm \frac{t + kl}{n}\right) \right\} \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{l}\right)}{kl} dt -$$

$$\sum_{k=m}^{q-2} ' \int_{\frac{3}{2}l}^{2l} \left\{ f\left(x \pm \lambda^{n,l}\left(\frac{t + (k-1)l}{n}\right)\right) - f\left(x \pm \lambda^{n,l}\left(\frac{t + kl}{n}\right)\right) \right\} \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{l}\right)}{kl} dt.$$

უკანასკნელი გამოსახულების პირველი წევრი შეიძლება შევავსოთ, როგორც  $J_{1,1}^{\pm}$  და მისი მნიშვნელობა მოდულით არ გადააჭარბებს შემდეგ სიდიდეს:

$$\frac{1}{l} \int_{\frac{3}{2}l}^{2l} \left| T_{n,l,\Delta}^{\pm}\left(x \pm \frac{t}{n}\right) \right| dt.$$

შევავსოთ

$$W^{\pm} := \sum_{k=m}^{q-2} \int_{\frac{3}{2}l}^{2l} \left\{ f\left(x \pm \lambda^{n,l}\left(\frac{t + (k-1)l}{n}\right)\right) - f\left(x \pm \lambda^{n,l}\left(\frac{t + kl}{n}\right)\right) \right\} \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{l}\right)}{kl} dt.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ  $t \in \left[\frac{3}{2}l, 2l\right]$ , მაშინ

$$(3.35) \quad \frac{t + (k-1)l}{n} \in [t_{k+1}, s_{k+1}], \quad \frac{t + kl}{n} \in [t_{k+2}, s_{k+2}],$$

და (3.24)-დან

$$\lambda^{n,l}\left(\frac{t + (k-1)l}{n}\right) = \frac{(3l - t) + (k-1)l}{n}; \lambda^{n,l}\left(\frac{t + kl}{n}\right) = \frac{(3l - t) + (k+1)l}{n}.$$

ამ ტოლობებისა და (3.35)-ის გამოყენებით, მივიღებთ

$$W^{\pm} = \sum_{k=m}^{q-2} ' \int_{\frac{3}{2}l}^{2l} \left\{ f\left(x \pm \frac{(3l - t) + (k-1)l}{n}\right) - f\left(x \pm \frac{(3l - t) + kl}{n}\right) \right\} \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{l}\right)}{kl} dt +$$

$$\sum_{k=m}^{q-2} ' \int_{\frac{3}{2}l}^{2l} \left\{ f\left(x \pm \frac{(3l - t) + kl}{n}\right) - f\left(x \pm \frac{(3l - t) + (k+1)l}{n}\right) \right\} \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{l}\right)}{kl} dt =$$

$$\int_{\frac{3}{2}l}^{2l} \sum_{k=m}^{q-2} ' \left\{ f\left(x \pm \frac{(3l-t) + (k-1)l}{n}\right) - f\left(x \pm \frac{(3l-t) + kl}{n}\right) \right\} \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{l}\right)}{kl} dt +$$

$$\int_{\frac{3}{2}l}^{2l} \sum_{k=m}^{q-2} ' \left\{ f\left(x \pm \frac{(4l-t) + (k-1)l}{n}\right) - f\left(x \pm \frac{(4l-t) + kl}{n}\right) \right\} \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{l}\right)}{kl} dt =:$$

$$W_1^\pm + W_2^\pm.$$

აქედან,

$$|W_1^\pm| \leq \int_{\frac{3}{2}l}^{2l} \left| \sum_{k=m}^{q-2} ' \left\{ f\left(x \pm \frac{(3l-t) + (k-1)l}{n}\right) - f\left(x \pm \frac{(3l-t) + kl}{n}\right) \right\} \frac{1}{kl} \right| dt =$$

$$\frac{1}{l} \int_{\frac{3}{2}l}^{2l} \left| T_{n,l,\Delta}^\pm \left( x \pm \frac{3l-t}{n} \right) \right| dt.$$

ცხადია,  $\frac{3l-t}{n} \rightarrow 0$ , როცა  $t \in \left[\frac{3}{2}l; 2l\right]$  და  $n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$ . თუ  $T_{n,l,\Delta}^\pm(x)$  თანაბრად კრებადია 0-კენ  $[a, b]$ -ს მომცველ რაიმე ინტერვალზე, მაშინ

$$W_1^\pm \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty.$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ზე.

მეორე მხვრივ,

$$|W_2^\pm| \leq \int_{\frac{3}{2}l}^{2l} \left| \sum_{k=m}^{q-2} ' \left\{ f\left(x \pm \frac{(4l-t) + (k-1)l}{n}\right) - f\left(x \pm \frac{(4l-t) + kl}{n}\right) \right\} \frac{1}{kl} \right| dt =$$

$$\frac{1}{l} \int_{\frac{3}{2}l}^{2l} \left| T_{n,l,\Delta}^\pm \left( x \pm \frac{4l-t}{n} \right) \right| dt.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ  $\frac{4l-t}{n} \rightarrow 0$ , როცა  $t \in \left[\frac{3}{2}l; 2l\right]$  და  $n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$ . თუ  $T_{n,l,\Delta}^\pm(x)$  თანაბრად კრებადია 0-კენ  $[a, b]$ -ს მომცველ რაიმე ინტერვალზე, მაშინ

$$W_2^\pm \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty,$$

თანაბრად  $[a, b]$ -ზე.

**შენიშვნა 3.12.** ადვილი საჩვენებელია, რომ სალემის [12] ტესტი გამომდინარეობს **თეორემა 3.11**-დან.

შემდეგი ორი თეორემა არის ფურიეს მწკრივის კრებადობის დინი-ლიფშიცის და დინის პირობების ანალოგი განზოგადებული დირიხლეს ინტეგრალებისათვის.

**თეორემა 3.13.** ვთქვათ,  $f$  თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty; \infty)$  ინტერვალზე. თუ  $\omega\left(f; \frac{l}{n}\right) \log n \rightarrow 0$ , როცა  $l, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$ , მაშინ

$$\lim_{l, \frac{n}{l} \rightarrow \infty} S_n^l(x; f) = f(x)$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ის მიმართ, ყოველი ფიქსირებული  $[a, b] (-\infty < a \leq b < \infty)$  ინტერვალისთვის.

**დამტკიცება:** **თეორემა 3.10**-დან

$$(3.36) \quad S_n^l(x, f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^l \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt + o(1).$$

ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ  $n$  კენტია. მაშინ

$$|T_{n,l,0}^\pm(x)| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{f\left(x \pm (k-1)\frac{l}{n}\right) - f\left(x \pm k\frac{l}{n}\right)}{k} \right| \leq \omega\left(f; \frac{l}{n}\right) \log n \rightarrow 0.$$

ამ უკანასკნელის, (3.36)-ის და **თეორემა 3.11**-ის გათვალისწინებით დავასკვნით

$$\lim_{l, \frac{n}{l} \rightarrow \infty} S_n^l(x; f) = f(x)$$

თანაბრად ყოველ  $[a, b] (-\infty < a \leq b < \infty)$  ინტერვალზე.

**თეორემა 3.14.** ვთქვათ,  $f$  არის ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც თანაბრად უწყვეტია  $(-\infty, -H], [H, \infty)$  ( $H > 0$ ) ინტერვალზე და  $\omega\left(f; \frac{l}{n}\right) \log l \rightarrow 0, l, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$ .

(i) დავუშვათ, რომ ფიქსირებული  $x$ -თვის

$$\int_{0+} \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt < \infty.$$

მაშინ

$$\lim_{l, \frac{n}{\tau} \rightarrow \infty} S_n^l(x; f) = f(x).$$

(ii) თუ  $f$  უწყვეტია  $[a, b]$ -ზე და

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_0^\tau \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt = 0$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$  ინტერვალზე, მაშინ

$$\lim_{l, \frac{n}{\tau} \rightarrow \infty} S_n^l(x; f) = f(x)$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ზე.

**დამტკიცება: თეორემა 3.10-დან**

$$(3.37) \quad S_n^l(x; f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^l \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt + o(1).$$

ვიგულისხმობთ, რომ  $n$  კენტი რიცხვია. ვთქვათ,  $\Delta \geq H + \max\{|a| + 1; |b| + 1\}$ .

მაშინ

$$|T_{n,l,\Delta}^\pm(x)| \leq \sum_{k=m}^n \frac{|f(x \pm (k-1)\frac{l}{n}) - f(x \pm k\frac{l}{n})|}{k} \leq \omega\left(f; \frac{l}{n}\right) \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \leq$$

$$\omega\left(f; \frac{l}{n}\right) (\log n - \log m) \leq \omega\left(f; \frac{l}{n}\right) \left(\log n - \log \frac{n\Delta}{l}\right) \leq \omega\left(f; \frac{l}{n}\right) \log l \rightarrow 0$$

ყოველი  $x \in (a-1, b+1)$ -თვის. მაშინ **თეორემა 3.11**-ის ძალით გვექნება

$$(3.38) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^l \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt = o(1)$$

თანაბრად  $[a, b]$ -ის მიმართ ყოველი ფიქსირებული  $\delta_1 > 0$ -თვის.

(i) ამ შემთხვევაში ვიგულისხმობთ, რომ  $a = x = b$ . **თეორემა 3.14**-ის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი  $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს ისეთი  $\delta_1 > 0$  რიცხვი, რომ

$$\int_0^{\delta_1} \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt < \varepsilon,$$

საიდანაც, (3.37) და (3.38)-დან გამომდინარეობს

$$|S_n^l(x; f) - f(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\delta_1} + \int_{\delta_1}^l \right) \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt \right| + o(1) < \varepsilon + o(1),$$

სადაც  $l, \frac{n}{l} \rightarrow \infty$  და  $\omega\left(f; \frac{l}{n}\right) \log l \rightarrow 0$ .

(ii) თუ  $\varepsilon > 0$  მოცემულია, მაშინ არსებობს ისეთი  $\delta_1 > 0$ , რომ

$$\int_0^{\delta_1} \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt < \varepsilon$$

ყოველი  $x \in [a, b]$ -თვის.

აქედან, (3.37) და (3.38) გამოსახულებების ძალით გვექნება

$$|S_n^l(x; f) - f(x)| \leq \left| \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\delta_1} + \int_{\delta_1}^l \right) \phi_x(t) \frac{\sin \frac{n\pi t}{l}}{t} dt \right| + o(1) < \varepsilon + o(1)$$

თანაბრად  $[a, b]$ -ის მიმართ.

□

**შენიშვნა 3.15.** თუ **თეორემა 3.13**-ში

$$O\left(\frac{n}{\log n}\right) \leq l \leq n$$

მაშინ  $f$  იქნება მუდმივი ფუნქცია. მართლაც, ასეთი  $l$  და  $h \in \left(\frac{1}{\log(n+1)}, \frac{1}{\log n}\right]$ -

თვის გვაქვს:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq 2\omega\left(f, \frac{1}{\log n}\right) \log n =$$

$$O\left(\omega\left(f, \frac{l}{n}\right)\right) \log n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

მაშასადამე,  $f = \text{const.}$

□

სხვადასხვა შედეგები შეიძლება მივიღოთ განზოგადებული სასრული ვარიაციის კლასებისთვის, რომლებიც განხილულია **განსაზღვრება 1.1**-ში.

განსაზღვროთ:

$$V(f; a, \infty) = V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, \infty)) := \sup_{b \in [a, \infty)} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]);$$

$$V(f; -\infty, b) = V\left(f, p_n \uparrow \infty, \phi, (-\infty, b]\right) := \sup_{a \in (-\infty, b]} V(f, p_n \uparrow \infty, \phi, [a, b]);$$

$$V(f; \pm H, \pm \infty) := \max\{V(f; -\infty, -H), V(f; H, \infty)\}.$$

**თეორემა 3.16.** ვთქვათ,  $f$  არის ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია, შემოსაზღვრული  $[a, b]$  ( $-\infty < a \leq b < \infty$ ) ინტერვალზე. დავუშვათ, რაიმე  $H \geq 0$ -თვის

$$V(f; \pm H, \pm \infty) < \infty$$

და

$$\omega^H\left(f; \frac{l}{n}\right) = o(1) \left\{ p\left(\tau\left(\frac{n}{l}\right)\right) \log \left[ p\left(\tau\left(\frac{n}{l}\right)\right) \right] \right\}^{-1},$$

სადაც  $\tau(u) = \min_{r \in \mathbb{Z}_+} \{\phi(r) \geq u\}$ .

მაშინ (იხილეთ (3.18) და (3.19))

$$T_{n,l,\Delta}^{\pm}(x) \rightarrow 0, \text{ როცა } n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty \quad (l \geq 1)$$

თანაბრად  $[a, b]$ -ს მომცველ რაიმე ინტერვალზე, სადაც  $\Delta = 0$ , როცა  $H = 0$  და  $\Delta > H + \max\{|a|, |b|\}$  არის რაიმე ფიქსირებული რიცხვი, როცა  $H > 0$ .



**დამტკიცება:** სიმარტივისთვის გამოვიყენოთ აღნიშვნა  $\sigma_j = f\left(x \pm (j-1)\frac{l}{n}\right) - f\left(x \pm j\frac{l}{n}\right)$  და ვიგულისხმოთ, რომ  $n$  კენტია. მაშინ

$$T_{n,l,\Delta}^{\pm}(x) = \sum_{j=m}^n \frac{\sigma_j}{j}.$$

ვთქვათ,  $\varepsilon_{n/l} = [\log p(\tau(n/l))]^{-1}$ ,  $s_{n/l} = \frac{p(\tau(n/l))}{\varepsilon_{n/l}}$  და  $\frac{1}{s_{n/l}} + \frac{1}{t_{n/l}} = 1$ . მაშინ

ჰელდერის უტოლობით მივიღებთ

$$\begin{aligned} |T_{n,l,\Delta}^{\pm}(x)| &\leq \sum_{j=m}^n \frac{|\sigma_j|}{j} = \sum_{j=m}^n |\sigma_j|^{\varepsilon_{n/l}} \frac{|\sigma_j|^{1-\varepsilon_{n/l}}}{j} \leq \\ &\left\{ \sum_{j=m}^n (|\sigma_j|^{\varepsilon_{n/l}})^{s_{n/l}} \right\}^{\frac{1}{s_{n/l}}} \cdot \left\{ \sum_{j=m}^n \left( \frac{|\sigma_j|^{1-\varepsilon_{n/l}}}{j} \right)^{t_{n/l}} \right\}^{\frac{1}{t_{n/l}}} \leq \\ &\left\{ \sum_{j=m}^n |\sigma_j|^{p(\tau(n/l))} \right\}^{\frac{\varepsilon_{n/l}}{p(\tau(n/l))}} \omega\left(f; \frac{l}{n}\right)^{1-\varepsilon_{n/l}} \left\{ \sum_{j=m}^n \left( \frac{1}{j} \right)^{t_{n/l}} \right\}^{\frac{1}{t_{n/l}}} = \\ &o(1)V(f; \pm H, \pm \infty)^{\varepsilon_{n/l}} \frac{1}{\{p(\tau(n/l)) \log [p(\tau(n/l))]\}^{1-\varepsilon_{n/l}}} \left\{ \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{j} \right)^{t_{n/l}} \right\}^{\frac{1}{t_{n/l}}}. \end{aligned}$$

რადგან

$$\left\{ \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{j} \right)^{\frac{t_n}{l}} \right\}^{\frac{1}{\frac{t_n}{l}}} \leq \frac{p\left(\tau\left(\frac{n}{l}\right)\right)}{\varepsilon_{\frac{n}{l}}},$$

ამიტომ გვექნება

$$(3.39) \quad |T_{n,l,\Delta}^{\pm}(x)| = o(1)V(f; \pm H, \pm \infty)^{\varepsilon_{n/l}} \frac{p(\tau(n/l))^{\varepsilon_{n/l}}}{\varepsilon_{n/l} \{\log p(\tau(n/l))\}^{1-\varepsilon_{n/l}}}.$$

თეორემის დამტკიცებისთვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (3.39)-ის მარჯვენა მხარეში მოცემული გამოსახულება შემოსაზღვრულია, რაც გამომდინარეობს  $\varepsilon_{n/l}$ -ის შერჩევიდან.

□

**შედეგი 3.17.** თუ  $f$  ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს, რომელიც მოცემულია თეორემა 3.16-ში  $H = 0$ -თვის, მაშინ

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ l, \frac{n}{l} \rightarrow \infty}} S_n^l(x; f) = f(x)$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$  ( $-\infty < a \leq b < \infty$ )-ზე.

**შედეგი 3.18.** ვთქვათ,  $f$  ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა. დავუშვათ, რომ რაიმე  $H > 0$ -თვის

$$V(f; \pm H, \pm \infty) < \infty$$

და

$$\omega^H\left(f; \frac{l}{n}\right) = o(1) \left\{ p\left(\tau\left(\frac{n}{l}\right)\right) \log \left[ p\left(\tau\left(\frac{n}{l}\right)\right) \right] \right\}^{-1}, n, \frac{n}{l} \rightarrow \infty,$$

სადაც  $\tau(u) = \min_{r \in \mathbb{Z}_+} \{\phi(r) \geq u\}$ .

(i) თუ ფიქსირებული  $x$ -თვის

$$\int_{0+} \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt < \infty,$$

მაშინ

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ l, \frac{n}{l} \rightarrow \infty}} S_n^l(x; f) = f(x).$$

(ii) თუ  $f$  უწყვეტია  $[a, b]$  ( $-\infty < a \leq b < \infty$ ) ინტერვალზე და

$$\lim_{\mu \rightarrow 0+} \int_0^\mu \frac{|\phi_x(t)|}{t} dt = 0$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ზე, მაშინ

$$\lim_{\substack{n \\ l, l' \rightarrow \infty}} S_n^l(x; f) = f(x)$$

თანაბრად  $x \in [a, b]$ -ზე.

შედეგი (3.17) და შედეგი (3.18) შეგვიძლია დავამტკიცოთ იგივე მეთოდით, რაც გამოვიყენეთ შესაბამისად, თეორემა (3.13) და თეორემა (3.14)-ის დამტკიცებაში.

## დასკვნა

შესწავლილია  $BV(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  კლასის ფუნქციონალური თვისებები, დადგენილია ამ კლასის „ანომალური“ თვისება და შემოღებულია  $(p_n, \varphi)$ -ვარიაციის აზრით კრებადობისა და  $(p_n, \varphi)$ -აბსოლუტურად უწყვეტობის ცნებები.  $(p_n, \varphi)$ -ვარიაციის აზრით აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა კლასი აღნიშნულია  $AC(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  სიმბოლოთი.

შემოღებულია აღნიშნული კლასის ექვივალენტური განსაზღვრება. დადგენილია  $(p_n, \varphi)$ -აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა კლასს და  $BV(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  ო  $C[a, b]$  კლასს შორის კავშირი. კერძოდ, დადგენილია პირობები  $p_n$  და  $\varphi_n$  მიმდევრობებისთვის, როცა  $AC(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  კლასი არის  $BV(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  ო  $C[a, b]$  კლასის არასაკუთრივი ქვესიმრავლე.

გამოკვლეულია  $AC(p_n \uparrow \infty, \varphi, [a, b])$  კლასის ფუნქციებისთვის სტეკლოვის ფუნქციებისა და სინგულარული ინტეგრალების  $(p_n, \varphi)$ -ვარიაციის აზრით კრებადობის საკითხები. შესწავლილია  $(p_n, \varphi)$ -აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა ფურიეს კოეფიციენტების რიგი და დადგენილია ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის თანაბარი კრებადობის პირობები.

განზოგადოებული დირიხლეს გულებისთვის დამტკიცებულია სალემის ტესტის ანალოგიური პირობა და მიღებულია სხვადასხვა შედეგი. კერძოდ, დინის, დინი-ლიფშიცის და კიტას ტესტი გაზოგადოებული დირიხლეს გულებისთვის

## ლიტერატურა

1. Akhobadze T., Function of generalized Wiener classes  $BV(p(n) \uparrow \infty, \phi)$  and their Fourier coefficients, Georgian Math. J., 7(2000), 401-416
2. Akhobadze T., A generalization of bounded variation, Acta math. Hungar., 97(2002), 223-256
3. Akhobadze, T., Zviadadze, Sh., On the generalization of the Salem test. Acta Math. Hung. 154(2018), 199-214
4. Bary N.K., A treatise on trigonometric series. vol. I. Macmillan, (New York, 1964)
5. Chanturia Z., The modulus of variation of a function and its application in the theory of Fourier series, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 214 (1974), 63-66
6. U. Goginava, On the divergnce of trigonometric Fourier series of the class  $H^\omega \cap BV(p(n) \uparrow \infty)$ , Proceedings of A. Razmadze Mahematical Institute, 121(1999), 63-70
7. Jordan C., Sur la séries de Fourier, C .R Acad. Sci. Paris, 92 (1881), 228-230
8. H. Kita, Convergence of Fourier series of a function on generalized Wiener's class  $BV(P(n) \uparrow \infty)$ , Acta Math. Hungar., 57(1991), 233-243
9. Kita H., Yoneda K., A generalization of bounded variation, Acta Math. Hungar., 56 (1990), 229-238
10. Love E. R., A generalization of absolute continuity, J. Lond. Math. Soc. 26 (1951), 1-13
11. Musielak J., Orlicz W., On generalized variations (I), Studia Mathematica, 18 (1959), 11-41
12. Salem, R., Essais sur les series trigonometrics. actualites sci. indust. N 862, Hermonn (Paris, 1940)
13. Taberski, R., On General Dirichlet' s integrals. Prace matyczne. 17(1973), 499-512
14. Torchinsky. A., Real-variable methods in harmonic analysis. Academic Press (1986)
15. Waterman D., On the summability of Fourier series of Function of  $\lambda$ -bounded variation, Studia Math., 44 (1972), 107-117

16. Waterman, D., A generalization of Salem test, *proc. A. M. S.* 105(1972), 129-133
17. Wiener N., The quadratic variation of function and its Fourier coefficients,  
Masachusetts J. Math., 3 (1924), 72-94
18. Ziemer W.P., Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of  
bounded variation, Springer-Verlag, (2012)
19. Zygmund, A., Trigonometric series. volumes I and II combined, third edition.  
Cambridge University Press (2002)
20. Young L., Sur une généralization de la notion de variation de puissance  $p$ -ième  
bornee au sen de N. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier, *C. R. Acad.  
Sci. Paris*, 204 (1937), 470-472.

## გამოქვეყნებული ნაშრომები

სადისერტაციო ნაშრომი დაეყრდნო შემდეგ გამოქვეყნებულ შრომებს:

1. T Akhobadze, K Ivanadze, **On the classes of functions of generalized bounded variation.** Banach Journal of Mathematical Analysis **14** (2022), 762-783
2. T Akhobadze, K Ivanadze, **On Salem test for general Dirichlet integrals.** Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics Reports, **49**(2023), (3-19)
3. T Akhobadze, K Ivanadze, **Note on classes of functions of generalized bounded variation.** Mathematical Notes (მიღებულია დასაბეჭდად)